Série VIII. — Tome IV. N° 4. Avril 1943.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

LUMIÈRE DIFFUSÉE EN AVANT PAR UNE GOUTTE D'EAU SPHÉRIQUE

Par J. BRICARD.
Observatoire du Pic du Midi.

Sommaire. — Rappel des relations de Mie, résultant de l'intégration des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique intérieur et extérieur à une particule sphérique frappée par une onde plane. Résultats numériques pour des valeurs de l'angle de diffusion θ comprises entre 0° et 50° avec la direction du faisceau parallèle incident et pour des valeurs du rapport $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 10; 20; 30$. ($R$ = rayon de gouttes, λ = longueur d'onde). Calcul de Wiener consistant à définir l'albédo d'une goutte sphérique en lui appliquant les lois de l'optique géométrique; une goutte rayonne également par diffraction, en se comportant comme un écran circulaire opaque. Expression de l'intensité diffractée à l'aide des mêmes unités que l'intensité diffusée par réflexion et réfraction, et résultats numériques pour l'ensemble; comparaison avec les résultats de Mie.

Vérifications expérimentales : les anneaux sombres observés autour de la source ont des emplacements conformes à la théorie classique de la diffraction et l'intensité diffusée en dehors du champ des anneaux suit d'une façon satisfaisante la répartition de Mie aussi bien que celle de Wiener.

La théorie de la diffusion de la lumière par les milieux troubles, développée par Lord Rayleich [1], et parfaitement vérifiée par une série d'expériences, n'est valable que dans le cas où la lumière tombe sur de très petites particules, dont les dimensions sont faibles devant la longueur d'onde de la lumière incidente. Les relations auxquelles elle conduit définissent la répartition de la lumière diffusée par une particule sous un angle quelconque avec le rayonnement incident, aussi bien que son état de polarisation.

Dans le cas où le milieu est constitué par des particules colloïdales, les phénomènes sont différents; on constate notamment à l'observation visuelle que la diffusion de la lumière n'est plus symétrique par rapport au plan perpendiculaire aux rayons incidents, et qu'elle est plus intense au voisinage de ces rayons que dans la direction opposée. Cette dissymétrie augmente en même temps que les dimensions des particules, et les phénomènes de polarisation se compliquent.

Les phénomènes que l'on observe sont encore différents dans le cas ou l'on est en présence de grosses particules; nous nous proposons de les exposer ici, et nous attacher plus spécialement à l'étude des couronnes colorées qui se produisent dans les brouillards constitués par des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air, au voisinage de la direction du faisceau parallèle éclairant celles-ci.

I

Le problème de la diffusion de la lumière par des particules de dimensions quelconques a été examiné par Love [2], puis repris par Mie [3] sans aucune restriction concernant l'indice des particules, et tenant compte de l'absorption de la lumière par celles-ci lorsque la conductibilité électrique est différente de zéro. Elle fut modifiée par Debye [4], Gans [5], Mecke [6] et d'autres auteurs. Toutefois, ces modifications, faites le plus souvent dans le but de simplifier les calculs très compliqués auxquels conduit la théorie de Mie, ne sont pas applicables dans le cas où nous nous plaçons.

Blumer [7] fut le premier à mettre en évidence la nature des courbes de diffusion pour des particules de différentes dimensions et de différents indices

en se basant sur la théorie de Mie, mais se borne à des particules de rayon maximum $0^{\mu},3$ dans le cas de l'eau. Rayleigh [8] fait des calculs théoriques pour des particules de dimensions comparables à la longueur d'onde de la lumière, et Ray [9] étend ces calculs à des particules de rayon à peu près égal au double de celle-ci; il les utilise pour expliquer les changements dans les couleurs axiales des solutions de soufre dans l'eau. Les calculs auxquels conduit la théorie de Rayleigh sont d'ailleurs, dans le cas de grosses particules, encore plus compliqués que ceux auxquels conduit la théorie de Mie.

Mie considère une onde plane tombant sur une particule sphérique placée au centre du système de coordonnées. En introduisant ces données dans les relations de Maxwell et en intégrant celles-ci pour le champ électromagnétique intérieur et extérieur à la particule, il obtient les expressions de l'amplitude du champ pour les ondes rayonnées dans toutes les directions. L'intégrale des équations de Maxwell comprenant une série de solutions partielles, le rayonnement dans chaque direction se répartit en une infinité d'ondes partielles. Si ν représente le numéro d'ordre des ondes partielles et λ la longueur d'onde de la lumière incidente dans le milieu extérieur à la particule, les valeurs de l'intensité lumineuse diffusée par une goutte, pour un observateur placé à une distance r de la particule très grande par rapport à son rayon R, et recevant la lumière diffusée sous un angle $\theta = \pi - \gamma$ avec le rayonnement incident sont déterminées par

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_1^{\infty} \nu\left[\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}\Pi_\nu + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}(\Pi_\nu \cos\gamma - \Pi'_\nu \sin^2\gamma)\right]\right|^2 \\ I_2 &= \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_1^{\infty} \nu\left[\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}(\Pi_\nu \cos\gamma - \Pi'_\nu \sin^2\gamma) + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\Pi_\nu\right]\right|^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

en prenant l'intensité incidente pour unité. Pour caractériser la polarisation de la lumière, Mie considère deux composantes : celle dont la vibration est disposée perpendiculairement au plan contenant la direction du rayon incident et à celle du rayon diffusé I_1, et celle qui vibre dans ce plan (I_2);

Le signe $|\,|^2$ indique que la valeur absolue de la parenthèse complexe doit être prise; Π_ν et sa dérivée Π'_ν par rapport à $\cos\gamma$ sont des fonctions de $\cos\gamma$; a_ν et p_ν sont des fonctions de R, λ, n (n désignant l'indice du milieu constituant la sphère par rapport au milieu environnant).

La somme $I_1 + I_2$ donne l'intensité lumineuse totale diffusée sous l'angle θ et la différence $I_1 - I_2$ est le surplus de lumière polarisée. Si cette différence est négative, le vecteur lumineux le plus intense est situé dans le plan contenant la direction de visée et la direction du rayon incident; si elle est positive, le vecteur lumineux est perpendiculaire à ce plan.

Lorsque le diamètre des particules est petit devant la longueur d'onde de la lumière incidente, les termes a_ν d'ordre supérieur à $\nu = 1$ sont négligeables ainsi que tous les termes p_ν y compris p_1, et la lumière rayonnée consiste en la première onde partielle (c'est le cas envisagé par Rayleigh). Lorsque les dimensions augmentent, on doit tenir compte des termes suivants, c'est-à-dire de la deuxième, puis de la troisième onde partielle, l'indice à partir duquel les termes deviennent suffisamment petits pour qu'on puisse les négliger étant de plus en plus élevé et les calculs de plus en plus compliqués.

Paranjepe, Naik et Vaidya [10] ont effectué ces calculs pour

$$\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30.$$

Nous reproduisons ici les résultats qu'ils ont obtenus pour des angles de diffusion θ compris entre 0 et 50°; p représente le pourcentage de lumière polarisée :

$$p = 100\,\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}. \qquad (2)$$

TABLEAU I.

$\alpha = 15$, $\beta = n\alpha = 20$, $n = \frac{4}{3}$.

θ....	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
I_1....	22781,35	4482,59	299,93	137,24	199,21	115,82
I_2....	22781,35	3589,95	157,40	184,17	254,94	93,31
I_1+I_2.	45562,70	8072,34	457,33	321,41	454,15	209,14
p.....	0	+11,0	+31,2	−14,6	−12,3	+10,8

TABLEAU II.

$\alpha = 20$, $\beta = n\alpha = 26,6$, $n = 1,33$.

θ....	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
I_1....	45871,00	890,00	641,96	108,95	43,03	22,10
I_2....	45871,00	1352,99	728,12	344,11	272,41	234,82
I_1+I_2.	91742,00	2421,99	1370,08	453,06	315,44	257,02
p.....	0	−26,5	−6,3	−51,9	−72,7	−82,7

TABLEAU III.

$\alpha = 30$, $\beta = n\alpha = 40$, $n = 1,33$.

θ....	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
I_1....	195719,00	9957,64		1025,98		297,68
I_2....	195719,00	9163,53		1042,40		368,50
I_1+I_2.	391788,00	19121,17		2068,38		666,18
p.....	0	+7,1		−0,8		−10,6

le Tableau III étant moins complet que les deux précédents étant donné la complexité des calculs.

Il en résulte, lorsque l'on s'écarte de la direction de propagation du faisceau éclairant les gouttes,

que l'intensité diffusée diminue d'autant plus rapidement que α, c'est-à-dire, pour une radiation donnée, que le rayon des gouttes est plus grand. Le tableau suivant représente les valeurs du rapport I_0/I_{50} (I_0 intensité diffusée suivant la direction du faisceau incident, I_{50} intensité diffusée sous un angle de 50° avec la première), en fonction des différentes valeurs de α.

α......	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30
I_0/I_{50}..	19	81	44	20	85	55	44	218	357	587

Ce rapport présente un caractère oscillant pour les valeurs de α inférieures à 15, puis augmente régulièrement pour les valeurs supérieures : on peut en déduire que les phénomènes doivent présenter un caractère différent dans les deux cas; le calcul suivant va nous permettre de préciser ces considérations.

II

Pour des gouttes suffisamment grandes par rapport à la longueur d'onde de la lumière visible ($\lambda = 0^{\mu},5$, $2R \geq 10\lambda = 5^{\mu},0$), R. Mecke [11] et A. Kastler [1] considèrent en première approximation que la lumière diffusée se compose exclusivement de deux parties : le flux lumineux diffusé par *réflexion* et *réfraction* d'une part, et celui diffusé par *diffraction* d'autre part.

Mecke [11] a montré que le flux lumineux Φ diffusé est le même pour les deux processus. Le flux lumineux réfracté et réfléchi est en effet celui qui tombe sur la goutte, soit

$$\Phi_1 = e\pi R^2,$$

e étant l'éclairement produit par le faisceau incident et πR^2 la section de la goutte.

D'autre part, d'après le théorème de Babinet, le flux lumineux Φ_2 diffracté par les bords d'un écran est égal au flux diffracté par le trou complémentaire; il est par conséquent égal au flux qui tombe sur la section de l'obstacle, soit

$$\Phi_2 = \Phi_1.$$

Le flux total diffusé par un obstacle transparent, dont la section peut d'ailleurs être quelconque, est ainsi toujours égal au double du flux intercepté par le contour géométrique de l'obstacle. Ce flux 2Φ est enlevé à l'onde incidente et détermine le coefficient d'absorption d'un brouillard de gouttelettes. Toutefois, il convient de noter que la plus grande partie de celui-ci se trouve diffusée au voisinage de la direction de propagation du faisceau parallèle incident. Cette remarque sera précisée dans un autre mémoire; elle permet d'expliquer l'inexactitude des coefficients d'absorption calculés par Jobst [12], et Trabert [13] ces auteurs ayant omis le facteur 2 dans toutes leurs formules.

[1] A. Kastler, *La diffusion de la lumière par les milieux troubles*, 1943. A paraître dans les *Actualités Scientifiques et Ind.*, chez Hermann, Paris. Ce travail m'a été aimablement confié par M. Kastler avant qu'il ne soit publié. Je lui suis vivement reconnaissant d'avoir bien voulu me fournir toutes les explications nécessaires au présent exposé.

Lumière diffusée par la goutte par réflexion et réfraction. — Wiener [14] a fait le calcul complet de l'intensité lumineuse diffusée par une goutte par réflexion et réfraction en lui appliquant les lois de l'optique géométrique, et en tenant compte des faisceaux ayant subi jusqu'à trois réflexions intérieures. Nous rappellerons brièvement son calcul.

a. Faisceau directement réfléchi. — Soit e l'éclairement produit par le faisceau incident au niveau de la goutte, k le pouvoir réflecteur, et I

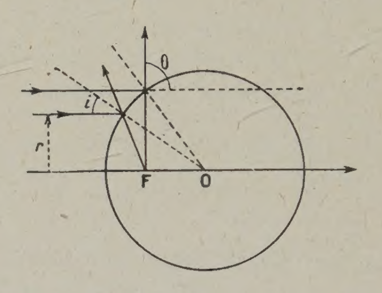


Fig. 1

l'intensité lumineuse diffusée par ce processus. Le flux lumineux compris entre les deux cylindres de rayon r et $r + dr$ donne naissance au flux réfléchi $d\Phi$ compris entre les cônes d'angle θ et $\theta + d\theta$ (*fig.* 1).

On a

$$\theta = \pi - 2i \qquad \text{et} \qquad r = R\sin i,$$

d'où

$$d\Phi = 2\pi er\,dr = \pi R^2 e \sin 2i\,di = \frac{1}{2}\pi R^2 e \sin\theta\,d\theta,$$

$$d\Phi' = I\,d\omega = I\,2\pi\sin\theta\,d\theta.$$

De l'égalité

$$d\Phi' = k\,d\Phi,$$

on tire

$$2\pi I \sin\theta\,d\theta = \frac{k}{2}\pi R^2 e \sin\theta\,d\theta,$$

d'où

$$I = \frac{1}{4}keR^2. \qquad (3)$$

L'intensité ainsi déterminée serait uniforme dans toutes les directions si le pouvoir réflecteur de la goutte était constant; en réalité, celui-ci dépend

de l'angle d'incidence. Il est égal à l'unité pour $i = 90°$ soit $\theta = 0$, c'est pourquoi, observée dans une direction voisine de celle de la source, la goutte éclairée paraît très brillante : l'intensité correspondante a pour valeur $I_0 = 0{,}250\, e\, R^2$ elle tombe à $0{,}066 e\, R$ pour $\theta = 25°$.

Ce calcul ne paraît rigoureux que si l'on se place dans le cas de l'approximation de Gauss, c'est-à-dire pour de faibles valeurs de l'incidence i; le faisceau cylindrique incident donne alors naissance à un faisceau conique réfléchi de sommet F, foyer du miroir convexe constitué par la surface extérieure à la goutte, et situé à la distance $OF = \frac{R}{2}$ du centre de celle-ci; lorsque l'incidence devient notable, les rayons réfléchis ne convergent plus en F, mais la distance de la goutte à laquelle se trouve l'observateur étant très grande par rapport à son rayon, la particule peut être considérée elle-même comme un point lumineux, ce qui justifie ce raisonnement.

La décroissance du pouvoir réflecteur k étant plus rapide pour la vibration située dans le plan d'incidence, la lumière réfléchie est donc plus riche en vibrations perpendiculaires à ce plan. Les résultats de ce calcul, pour des angles égaux au plus à 25° avec la direction du faisceau incident, se trouvent dans les colonnes 2 et 4 du Tableau IV, extrait de la Table VI de Wiener (*loc. cit.* [14], p. 106).

b. LUMIÈRE RÉFRACTÉE ET TRANSMISE PAR LA GOUTTE. — La plus grande partie de la lumière diffusée au voisinage de la direction d'incidence est réfractée par la goutte, qui fonctionne alors comme une lentille sphérique (*fig.* 2). Dans ce cas, un raisonnement analogue au précédent conduit, pour l'intensité lumineuse de celle-ci examinée sous un angle θ avec la direction du faisceau parallèle incident, à l'expression suivante :

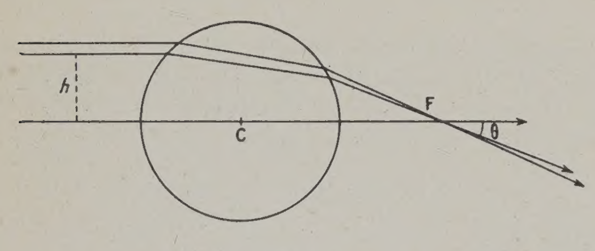


Fig. 2.

$$I = \frac{1}{2}\, t e R^2 \frac{\sin 2i}{\sin\theta} \frac{di}{d\theta}, \qquad (4)$$

t représentant le coefficient de transmission de la goutte.

Les résultats de ce calcul se trouvent représentés dans le Tableau IV, colonnes 3 et 5; on voit que l'intensité décroît rapidement lorsque θ augmente; la décroissance est plus rapide pour la vibration perpendiculaire au plan déterminé par le rayon incident et le rayon réfléchi que pour la vibration située dans ce plan.

TABLEAU IV. — *Intensité lumineuse diffusée par une goutte d'eau par réflexion et réfraction.*

θ.	i_1.	i'_1.	i_2.	i'_2.	I_1.	I_2.	I.
0°...	0,125	1,918	0,125	1,918	2,043	2,043	4,086
1...	0,120	1,911	0,116	1,911	2,031	2,027	4,058
2...	0,115	1,901	0,108	1,901	2,016	2,009	4,025
3...	0,111	1,885	0,101	1,886	1,996	1,987	3,983
4...	0,107	1,861	0,094	1,865	1.968	1,959	3,927
5...	0,103	1,831	0,088	1,838	1,934	1,926	3,860
6...	0,099	1,796	0,082	1,806	1,895	1,888	3,783
7...	0,096	1,755	0,077	1,769	1,850	1,846	3,696
8...	0,091	1,708	0,072	1,727	1,799	1,799	3,598
9...	0,087	1,655	0,067	1,680	1,742	1,747	3,489
10...	0,084	1,598	0,062	1,628	1,682	1,690	3,372
11...	0,081	1,538	0,058	1,572	1,619	1,630	3,249
12...	0,078	1,475	0,054	1,512	1,533	1,566	3,119
13...	0,075	1,410	0,050	1,450	1,485	1,500	2,985
14...	0,072	1,344	0,046	1,387	1,416	1,433	2,849
15...	0,069	1,278	0,043	1,323	1,347	1,366	2,713
16...	0,066	1,214	0,040	1,262	1,280	1,302	2,582
17...	0,063	1,151	0,037	1,205	1,214	1,242	2,456
18...	0,061	1,090	0,034	1,150	1,151	1,184	2,335
19...	0,058	1,030	0,032	1,097	1,089	1,129	2,218
20...	0,057	0,974	0,030	1,046	1,031	1,076	2,107
21...	0,054	0,920	0,028	0,997	0,974	1,025	1,999
22...	0,052	0,870	0,026	0,949	0,922	0,975	1,897
23...	0,050	0,822	0,024	0,901	0,872	0,925	1,797
24...	0,048	0,776	0,022	0,854	0,824	0,876	1,700
25...	0,046	0,731	0,020	0,808	0,778	0,828	1,606

$i_1 + i'_1 = I_1$.

i_1, lumière réfléchie, dont la vibration est perpendiculaire au plan contenant la direction du rayon incident et celle du rayon réfléchi.

i'_1, lumière réfractée dont la vibration est parallèle à la précédente.

$i_2 + i'_2 = I_2$.

i_2, lumière réfléchie dont la vibration se trouve dans un plan parallèle à celui qui contient la direction du rayon incident et celle du rayon réfléchi.

i'_2, lumière réfractée dont la vibration est parallèle à la précédente.

$I = I_1 + I_2 =$ lumière totale diffusée.

Les intensités du tableau ont été nommées en divisant par le facteur eR^2.

Le Tableau IV donne les variations de l'intensité totale de la goutte pour les valeurs de θ comprises entre 0 et 25°. En additionnant la lumière réfractée et réfléchie, il y a compensation des effets de polarisation; il y a un léger excès de lumière polarisée vibrant perpendiculairement au plan d'incidence pour $\theta < 8°$, atteignant un maximum de 0,5 pour 100

entre 3 et 4°. Au-dessus de $\theta = 8°$, il y a un excès croissant de lumière polarisée vibrant dans le plan d'incidence atteignant 3 pour 100 pour $\theta = 25°$.

c. Lumière diffractée par la goutte. — La lumière diffractée par le contour de la goutte donne naissance aux couronnes de diffraction.

Soit J l'intensité lumineuse diffractée par la goutte, dans la direction θ. Elle est donnée par l'expression

$$J = J_0 \left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2, \qquad (5)$$

où $J_1(u)$ représente la première fonction de Bessel, et u une variable auxiliaire

$$u = \frac{2\pi R}{\lambda}\sin\theta, \qquad (6)$$

J_0 est l'intensité du maximum de la tache centrale de diffraction.

Si l'on veut comparer l'intensité de la lumière diffractée à celle de la lumière réfractée et réfléchie, il faut connaître J_0 en fonction de l'éclairement incident et du rayon R de la goutte; la théorie de la diffraction montre que J_0 est proportionnel à $\frac{R^4}{\lambda^2}$, mais ne permet pas le calcul de J_0 en valeur absolue. Ce calcul a été fait par Blumer [7] par interpolation graphique pour des valeurs de $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda}$ comprises entre 0,1 et 12; toutefois d'après A. Kastler, il est plus facile de raisonner de la façon suivante : en effet, d'après le théorème de Babinet, le flux total diffracté

$$\Phi = \int_0 J(\theta)\,\mathrm{d}\omega$$

est égal au flux lumineux tombant sur la goutte

$$e\pi R^2 = \int_0 J(\theta)\,2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi J_0 \int_0 \left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour de petits angles θ, cette expression se simplifie. On peut écrire :

$$\theta = \frac{\lambda}{2\pi R}u \qquad \text{et} \qquad \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \theta\,\mathrm{d}\theta = \left(\frac{\lambda}{2\pi R}\right)^2 u\,\mathrm{d}u.$$

$$\frac{eR^2}{J_0} = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 R^2}\int_0^\infty \frac{J_1^2(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\lambda^2}{\pi^2R^2}\,\frac{1}{\mu}.$$

En posant

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mu}, \qquad J_0 = e\,\frac{\pi^2R^4}{2\lambda^2}\,\mu$$

d'après Watson [15], on a

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$J_0 = e\,\frac{\pi^2R^4}{\lambda^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 eR^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 eR^2. \qquad (7)$$

Nous sommes alors en mesure de comparer l'intensité de la lumière diffractée à celle de la lumière réfléchie et réfractée; dans la même direction, cette dernière a pour valeur (Tableau IV)

$$I_0 = (0{,}250 + 3{,}836)eR^2 = 4{,}086\,eR^2. \qquad (8)$$

La relation (7) devient ainsi

$$J_0 = \frac{I_0}{4\cdot 4{,}086}\alpha^2 = 6{,}120.10^{-2} I_0\alpha^2. \qquad (9)$$

D'autre part, les intensités des premières couronnes entourant la tache centrale de diffraction sont

$$J_1 = 0{,}0175\,J_0, \qquad J_2 = 0{,}0041\,J_0, \qquad J_3 = 0{,}0016\,J_0,$$

soit, en fonction de I_0 et de α

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= 1{,}071.10^{-3} I_0\alpha^2,\\ J_2 &= 2{,}509.10^{-4} I_0\alpha^2,\\ J_3 &= 9{,}792.10^{-5} I_0\alpha^2.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Si l'on prend $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 30$, on obtient

$$J_0 = 55{,}980\,I_0, \qquad J_1 = 0{,}964\,I_0,$$
$$J_2 = 0{,}226\,I_0, \qquad J_3 = 0{,}088\,I_0.$$

Dans ce cas, l'intensité des couronnes de diffraction est du même ordre de grandeur que la lumière diffusée par la goutte par réflexion et réfraction : les couronnes sont noyées dans la lumière diffusée. On voit d'après cet exemple que la superposition de la lumière réfractée et réfléchie à la lumière diffractée diminue le contraste des anneaux; il est illustré par le Tableau 5 et le graphique 3. Entre le troisième minimum et le troisième maximum l'intensité remonte à peine : à partir de la quatrième couronne, les maxima auront disparu, et il ne restera plus qu'une courbe ondulée d'intensité décroissante.

Bien entendu, le calcul que nous exposons n'est pas rigoureux : les approximations que nous avons faites ne sont plus valables pour les angles θ envisagés. D'autre part, les vibrations provenant des trois effets (réflexion, réfraction et diffraction) ne sont pas incohérentes; au lieu d'additionner leurs intensités, il conviendrait, en toute rigueur, ainsi que l'a fait Mecke [6], de composer leurs amplitudes en tenant compte des différences de phase entre les vibrations. Toutefois, il est à noter que les ordres de grandeur de ces trois amplitudes, surtout lorsque le rayon des gouttes est important, sont nettement différents. Enfin, les brouillards ne sont jamais parfaitement homogènes; dès que le rayon des gouttes atteint une valeur suffisante, il suffit d'une faible variation en valeurs relatives

TABLEAU V. — *Intensité de la lumière diffractée exprimée avec les mêmes unités que l'intensité de la lumière réfléchie et réfractée*

pour $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 30$.

$$u = \frac{2\pi R}{\lambda}\sin\theta, \qquad J = \frac{J}{J_0}\frac{J_0}{I_0}I_0 = \left(\frac{\pi R}{\lambda}\right)^2 \frac{J}{J_0} = 225\,\frac{J}{J_0}.$$

u.	$\frac{J}{J_0}$.		$\sin\theta$.	θ.	J.
				°	
0	1,0		0	0	225
1,0	0,7746		0,0333	1,54	174,28
2,0	0,3336		0,0666	3,49	75,06
2,2	0,2550		0,0733	4,13	57,37
2,4	0,1880		0,0800	4,35	42,30
2,6	0,1310		0,0866	4,58	29,47
2,8	0,0857		0,0933	5,22	19,28
3,0	0,0511		0,1000	5,45	11,49
3,2	0,0267		0,1067	6,8	6,00
3,4	0,0111		0,1133	6,31	2,49
3,6	0,0088		0,1200	6,54	0,63
3,8	0,0000	1er min.	0,1267	7,16	0,00
4,0	0,0011		0,1333	7,39	0,24
4,2	0,0044		0,1400	8,3	0,99
4,4	0,0085		0,1467	8,26	1,91
4,6	0,0125		0,1533	8,49	2,81
4,8	0,0155		0,1600	9,13	3,48
5,0	0,0172		0,1667	9,35	3,87
5,2	0,0174	1er max.	0,1733	9,59	3,91
5,4	0,0164		0,1800	10,22	3,69
5,6	0,0143		0,1867	10,46	3,21
5,8	0,0115		0,1933	11,9	2,58
6,0	0,0085		0,2000	11,33	1,91
6,2	0,0056		0,2067	11,56	1,26
6,4	0,0032		0,2133	12,19	0,72
6,6	0,0014		0,2200	12,43	0,31
6,8	0,0004		0,2267	13,6	0,09
7,0	0,0000	2e min.	0,2333	13,29	0,00
7,2	0,0002		0,2400	13,53	0,04
7,4	0,0009		0,2477	14,17	0,20
7,6	0,0017		0,2533	14,40	0,38
7,8	0,0027		0,2600	15,4	0,60
8,0	0,0035		0,2667	15,28	0,78
8,2	0,0040		0,2733	15,52	0,90
8,4	0,0042	2e max.	0,2800	16,16	0,94
8,6	0,0040		0,2867	16,40	0,90
8,8	0,0036		0,2933	17,4	0,81
9,0	0,0030		0,3000	17,27	0,67
9,2	0,0022		0,3067	17,52	0,49
9,4	0,0015		0,3133	18,16	0,33
9,6	0,0008		0,3200	18,40	0,18
9,8	0,0004		0,3267	19,4	0,09
10,0	0,0001		0,3333	19,28	0,02
10,2	0,0000	3e min.	0,3400	19,53	0,00
10,4	0,0001		0,3467	20,17	0,02
10,6	0,0004		0,3533	20,42	0,09
10,8	0,0007		0,3600	21,6	0,15
11,0	0,0010		0,3667	21,30	0,22
11,2	0,0013		0,3733	21,56	0,29
11,4	0,0015		0,3800	22,20	0,33
11,6	0,0016	3e max.	0,3867	22,45	0,36
11,8	0,0016		0,3933	23,10	0,36
12,0	0,0014		0,4000	23,35	0,31
13,4	0,0000	4e min.	0,4467	26,32	0,00

de la part de celui-ci pour entraîner une variation de la différence de phase entre les différentes vibrations telle que, dans l'ensemble, il soit parfaitement légitime de les considérer comme incohérentes.

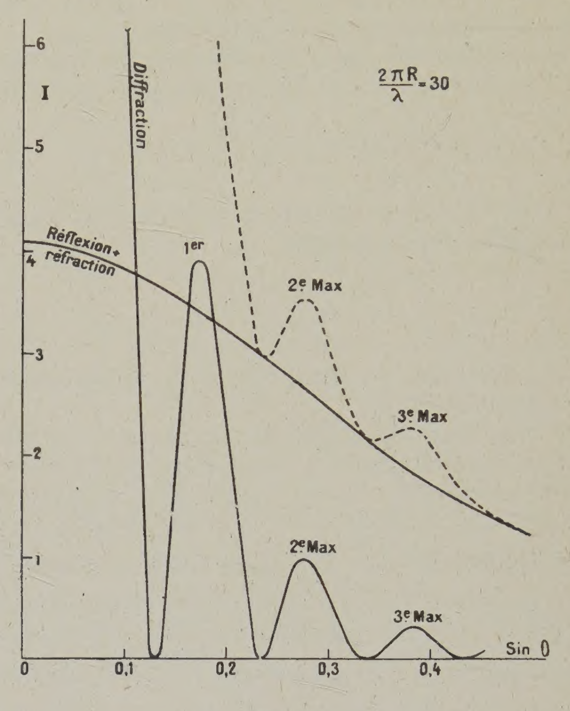


Fig. 3.

Remarque. — Nous avons admis que l'intensité lumineuse diffractée est donnée par l'expression (5)

$$J = J_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2.$$

En réalité, l'on doit introduire dans cette expression un coefficient k tel que

$$J = kJ_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2.$$

Ce coefficient, égal à l'unité dans la direction correspondant au centre de la figure de diffraction, diminue lorsque l'angle θ augmente; Wiener (*loc. cit.* [14], p. 122) admet qu'il est de la forme

$$k = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta).$$

Quelle que soit l'hypothèse que l'on fasse sur la forme de ce coefficient, il n'est pas douteux qu'il ait pour effet de diminuer l'amplitude des maxima correspondant aux couronnes de diffraction : celles-ci sont donc plus atténuées que nous ne l'avons admis dans l'exemple précédent, ce qui a pour effet d'atténuer encore le contraste qu'elles présentent par rapport à l'intensité diffusée.

Comparaison avec la théorie de Mie. — 1° Le tableau suivant donne les variations de l'intensité lumineuse diffusée par une goutte d'eau examinée sous des angles compris entre 0 et 50° avec la direction de propagation de la lumière incidente d'après la théorie de Mie (I_M), et d'après le calcul que nous venons d'exposer (I_W), pour $\alpha = 30$, exprimées avec la même valeur pour $\theta = 0$, ainsi que les pourcentages p_M et p_W de lumière polarisée correspondants.

TABLEAU VI.

θ....	0°.	5°.	10°.	15°.	20°.	25°.
I_W....	229,086	33,33	7,28	3,31	2,107	1,606
I_M....	229,086	–	11,90	–	–	–
p_W....	0	+0,26	−0,23	−0,7	−2,18	−2,98
p_M....	0	–	+7,1	–	–	–

θ....	30°.	35°.	40°.	45°.	50°.
I_W....	1,165	0,845	0,595	0,408	0,256
I_M....	1,210	–	–	–	0,389
p_W....	−4,54	−5,08	−7,56	−9,8	−10,93
p_M....	−0,8	–	–	–	−10,6

On voit que, sauf au voisinage des petits angles, les deux théories donnent des résultats comparables.

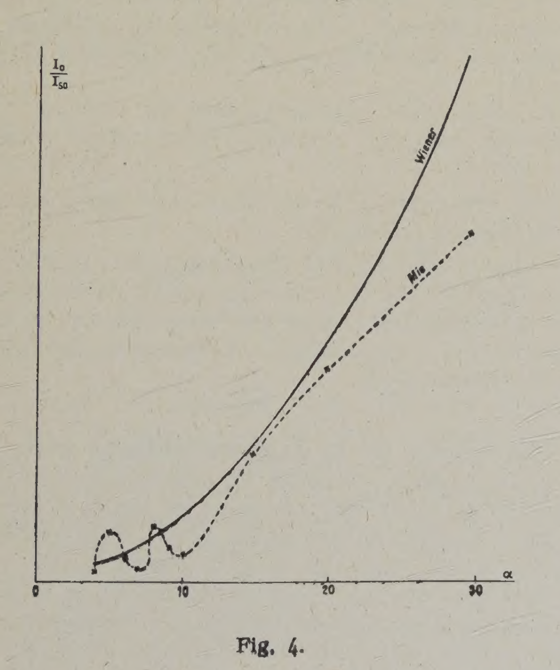


Fig. 4.

2° On peut exprimer d'après le calcul précédent en fonction de α les variations du rapport de l'intensité diffusée suivant la direction de la lumière incidente et sous l'angle $\theta = 50°$, soit

$$\frac{I_0}{I_{50}} = \frac{1}{0,256}\left(4,086 + \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

La figure 4 représente ces variations, ainsi que les résultats correspondants calculés d'après la théorie de Mie pour α compris entre 4 et 30. Comme il fallait s'y attendre, on voit qu'ils sont très différents pour les valeurs de α inférieures à 10, où la théorie de Mie est seule valable, et voisins lorsque α est compris entre 10 et 20; l'accord n'est plus aussi bien réalisé pour les valeurs supérieures de α. Le rapprochement de ces résultats théoriques avec ceux que donne l'expérience va nous permettre de préciser les cas dans lesquels on peut appliquer l'une ou l'autre méthode.

III

Pour que ces deux théories soient applicables, il importe que le brouillard ait une densité convenable. D'après Trinks [16], la théorie de Mie serait inexacte si les gouttes étaient par trop rapprochées les unes des autres, mais valable lorsque leur distance est égale au double de leur diamètre. De même, le principe de Babinet ne s'applique plus lorsque les écrans ne sont pas suffisamment éloignés les uns des autres. Nous avons montré que les nuages dans lesquels nous avons opéré [17], comme nous le verrons dans la suite de cet exposé, comportent en moyenne 1000 gouttes par cm³ : les conditions d'application des deux théories précédentes sont donc ainsi satisfaites. Les auteurs qui ont étudié les brouillards artificiels ne précisent pas ce point.

D'après le calcul que nous venons d'exposer, on doit admettre que les couronnes observées dans le brouillard autour d'un projecteur peuvent être considérées comme la superposition de deux phénomènes :

1° Anneaux de diffraction produits par les gouttes se comportant comme des écrans circulaires opaques, dont le diamètre est égal à celui des gouttes.

2° Lumière transmise par les gouttes ou réfléchie à leur surface.

Nous allons étudier séparément ces deux phénomènes au point de vue expérimental.

Couronnes de diffraction. — Dans les brouillards artificiels, en lumière monochromatique, Mecke [6] a montré que l'approximation ci-dessus cessait d'être valable pour des diamètres des gouttes inférieurs à 4µ, et que la transition se faisant entre 4µ et 5µ. Ce fait est à rapprocher de l'allure de la courbe 4 présentant une transition avec rapprochement entre les résultats de la théorie de Mie et ceux du calcul précédent pour α compris entre 15 et 20.

Dans les brouillards naturels, Monnier [18], et d'autres auteurs en utilisant des filtres colorés,

nous-même (20) en lumière monochromatique (arc à mercure convenablement filtré), avons montré que, pour des gouttes de rayon supérieur à 5µ, la théorie classique de la diffraction était toujours valable.

Nous avons photographié, en lumière monochromatique, les anneaux observés à travers le brouillard autour d'un projecteur (brouillards naturels au sommet du Puy de Dôme), et obtenu, pour des gouttes de rayon supérieur à 8µ, des clichés montrant plusieurs séries d'anneaux parfaitement nets; d'autre part, nous avons constaté que, pour des gouttes de rayon inférieur à 8µ, jusqu'à 3µ, ces anneaux disparaissent. Il ne reste plus alors sur le cliché qu'une tache très noire, entourée d'une large couronne bien limitée, dont le noircissement est uniforme.

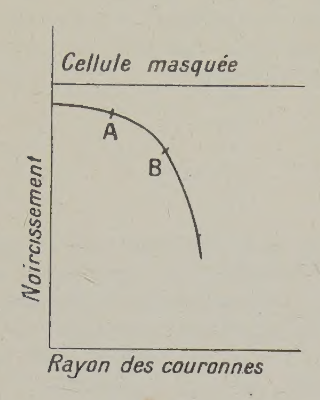


Fig. 5.

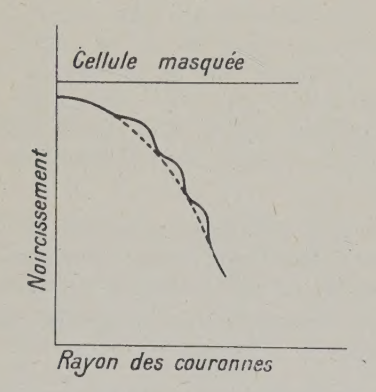


Fig. 6.

Les enregistrements microphotométriques de ces clichés suivant un des diamètres des anneaux donnent une courbe ayant toujours la même allure générale. Pour des gouttes de rayon inférieur à 8µ, cette courbe a l'aspect représenté par la figure 5. Pour des rayons supérieurs des gouttes, les anneaux sombres observés sur les clichés se traduisent par des ondulations au-dessus d'une courbe moyenne semblable à la précédente, et dont l'aspect est représenté par la figure 6.

Le graphique 3 permet d'interpréter l'aspect de ces enregistrements : la superposition de la lumière réfléchie et réfractée à la lumière diffractée diminue le contraste des anneaux : on voit qu'entre le troisième maximum et le troisième minimum, l'intensité remonte à peine, et il ne reste qu'une courbe ondulée constamment décroissante.

D'autre part, le rapport

$$\frac{J_1}{I_0} = 1{,}071\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 . 10^{-3}$$

de l'intensité du premier maximum à l'intensité centrale de diffusion diminue avec le rayon des gouttes : les anneaux deviennent d'autant moins visibles que le rayon de celles-ci diminue, et finissent par disparaître pour les faibles rayons. Dans ces conditions, l'œil examinant directement le cliché, croit encore déceler des couronnes distinctes (effet Mach) [21] qu'il est impossible de déceler par l'enregistrement au microphotomètre. Les variations d'intensité de la lumière diffractée en fonction de l'angle de diffraction ne se manifestent plus que par des inflexions de la courbe photométrique. La valeur du rayon des gouttes pour laquelle disparaîtront ces anneaux dépend, bien entendu, du contraste de l'émulsion employée, et du développement qu'elle a subi.

A cette cause de diminution du contraste des anneaux viennent s'ajouter deux autres causes, qui sont :

L'étendue de la source lumineuse, qui n'est pas parfaitement ponctuelle;

L'inhomogénéité des dimensions des gouttes de brouillard; ce facteur, ainsi que nous l'avons montré, est lui-même très important dans les expériences précédentes, étant donnée la constitution des brouillards naturels [20].

Répartition de la lumière diffusée pour les grands angles. — Dans les brouillards artificiels, Pokrowski [22] trouve que, pour les angles θ compris entre 30 et 60°, la répartition de la lumière diffusée et la répartition de la lumière polarisée sont conformes au calcul de Wiener, comme on le voit sur le Tableau 7, et ne dépendent pas des dimensions des gouttes (ceci n'est d'ailleurs plus vrai pour les valeurs supérieurs de θ).

Paranjepe, Naik et Vaidya [10] ont fait des mesures analogues pour des gouttes telles que α était compris entre 4 et 30. Le Tableau 8 représente les résultats qu'ils ont obtenus pour $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 30 (I_{30})$. On voit que ces résultats rapportés aux mêmes unités que ceux de Wiener (I_W), sont du même ordre de grandeur que ceux-ci lorsque $\theta \leq 40°$. Toutefois,

l'accord n'est pas aussi bon que dans les mesures de Pokrowski (¹),

TABLEAU VII.

θ....	20°.	30°.	40°.	45°.	50°.	60°.
I_W....	–	0,609	0,320	0,224	0,142	0,112
I_P....	–	0,609	0,315	0,238	0,194	0,100
p_W....	—2,18	—4,54	—7,5	–	—10,9	—14
p_M....	–	—0,8	–	–	—10,6	—81,9
p_P....	—3	—5	—6	–	—9	—11

I_W, intensité calculée d'après Wiener, dont la vibration se trouve dans le plan contenant la direction du rayon incident et celle du rayon diffusé.

I_P, intensité correspondante déterminée expérimentalement en valeurs relatives par Pokrowski, et exprimée à l'aide des mêmes unités que la précédente.

p_W, pourcentage de lumière polarisée d'après le calcul de Wiener.

p_M, pourcentage de lumière polarisée d'après le calcul de Mie pour

$$\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda} = 30.$$

p_P, pourcentage de lumière polarisée d'après les mesures de Pokrowski.

Dans les brouillards naturels, nous avons déterminé [23] la répartition de la lumière diffusée par des gouttes d'eau de rayon compris entre 4^μ et 8^μ, et avons trouvé que celle-ci ne dépend pas sensiblement des dimensions des particules; ces résultats sont représentés par la quantité I_b dans le Tableau 8, et sont rapportés aux mêmes unités que les autres.

TABLEAU VIII.

θ.......	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
I_W......	3372	2107	1165	595	256
I_M......	–	–	1210	–	389
I_{30}......	–	2107	1007	576	302
I_b......	3372	1686	1112	674	539

I_M, intensité calculée par Paranjepe, Naik et Vaidya à partir des relations de Mie pour $\alpha = 30$.

Bien que ces mesures aient été effectuées en plein air, et de ce fait, soient entachées d'erreurs supérieures à celles de Pokrowski ou de Paranjepe, Naik et Vaidya, et que I_b représente la moyenne des résultats obtenus dans chaque direction, ceux-ci sont cependant comparables aux précédents pour $\theta \leq 40°$; pour des valeurs supérieures de θ, ils ne sont plus conformes au calcul de Wiener (*Ann. der Phys. loc. cit.* [20], p. 187). La figure 7 résume cet exposé.

(¹) En lumière blanche, les auteurs précédemment cités constatent, à l'examen visuel, et pour des valeurs suffisantes du rayon des gouttes, que les couronnes présentent une succession de couleurs conformes aux lois classiques de la diffraction. Signalons toutefois les anomalies trouvées par TEUCHER (*Phys. Zeits.*, **40**, 1939, p. 90) à l'examen spectrographique de la lumière diffusée sous des angles 9°10 et 14°20 avec la direction du faisceau parallèle incident, et des gouttes de rayon moyen compris entre 5^μ et 8^μ,5.

Conclusion. — La théorie de Mie et le calcul qui consiste à considérer la lumière réfractée et réfléchie par la goutte, et la lumière diffractée par

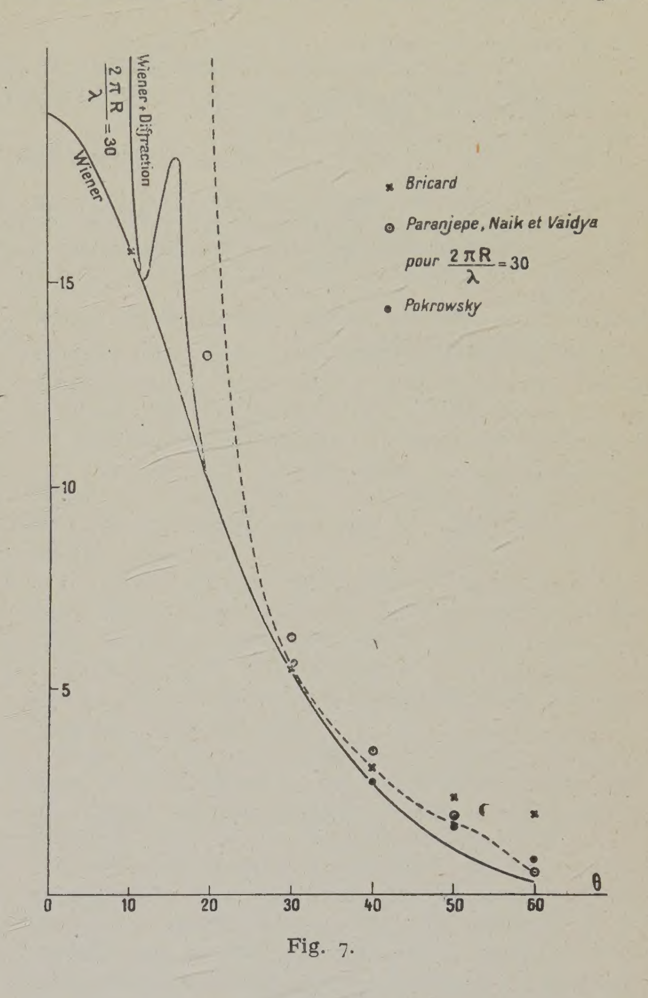


Fig. 7.

ses bords donnent des résultats comparables pour des dimensions convenables des gouttes ($\alpha > 20$); la seconde méthode a l'avantage de conduire à des calculs simples, interprétant facilement les phénomènes, alors que la première conduit à des calculs extrêmement longs et compliqués. Toutefois, il est à noter que le calcul de Wiener, valable dans le cas où les rayons diffusés sont faiblement inclinés sur la direction du faisceau incident, ne l'est plus dès que l'inclinaison devient notable, et qu'il ne permet pas d'interpréter les phénomènes observés lorsqu'on étudie la lumière diffusée latéralement, ni les états de polarisation observés dans le champ des arcs-en-ciel.

Je suis très vivement reconnaissant à MM. A. Cotton et Ch. Maurain d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail.

Manuscrit reçu le 5 octobre 1942.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, 1871, **4**, 1881, **5**, 1899, **5**.
[2] LOVE, *Proc. London. Math. Soc.*, 1899, **30**, p. 308.
[3] MIE *Ann. der Phys.*, 1908, **25**, p. 128.
[4] DEBYE, *Ann. der Phys.*, 1909, **30**, p. 57.
[5] GANS, *Ann. der Phys.*, 1925, **76**, p. 29.
[6] MECKE, *Ann. der Phys.*, 1920, **61**, p. 471; 1920, **62**, p. 623.
]7] BLUMER, *Zeits. für Phys.*, 1925, **32**, p. 119; 1926, **38**, p. 308 et 942; 1926, **39**, p. 193.
[8] RAYLEIGH, *Proc. Roy. Soc.*, série A, 1911, **84**, p. 25.
[9] RAY, *Proc. Ind. Assoc. Cultiv. Sc.*, 1921, **7**, p. 1; 1923, **8**, p. 23.
[10] PARANJEPE, NAIK et VAIDYA, *Proc. Ind. Acad.*, série A. 1939, p. 333 et 353.
[11] MECKE, *Ann. der Phys.*, 1921, **65**, p. 257.
[12] JOBST, *Ann. der Phys.*, 1925, **70**, p. 158.
[13] TRABERT, *Meteor. Zeits.*, 1901, p. 518.
[14] WIENER, *Abhandl. Kaiserl. Leopold. Karol. Deutsch. Akad. der Naturforscher*, 1907, **73**, p. 1.
[15] WATSON, *Theory of Bessel Functions*, p. 404.
[16] TRINKS, *Ann. der Phys.*, 1935, **22**, p. 561.
[17] BRICARD, *C. R. Acad. Sc.*, 1942, **214**, p. 439.
[18] MONNIER, *Thèses, Université de Caen*, 1936, p. 106.
[19] BRICARD, *Annales de Phys.*, 11e série, 1940, **14**, p. 187.
[20] BRICARD *C. R. Acad. Sc.*, 1938, **206**, p. 1038.
[21] MACH, *Wien. Ber.*, 1863, **52**, p. 303; 1865, **54**, p. 133.
[22] POKROWSKI, *Zeits. für Phys.*, 1927, **43**, p. 769.
[23] BRICARD, *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **213**, p. 495.

PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES DANS UN SOLIDE ET PROPAGATION DES COMPOSANTES SYMÉTRIQUES DANS UN RÉSEAU TRIPHASÉ

Par MAURICE PARODI.

Sommaire. — L'auteur montre l'analogie que présente la propagation, dans les systèmes électriques triphasés, des composantes symétriques des courants avec celle des ondes élastiques longitudinales et transversales dans un solide.

1. **Généralités.** — On sait que la théorie atomique du corps solide a pris une forme qui rend compte d'une façon satisfaisante d'un grand nombre de phénomènes que l'expérience permet de déceler et que, de plus, les méthodes de calcul que l'on utilise dans l'étude des vibrations des cristaux polaires sont susceptibles de conduire à la résolution de problèmes de nature très différente qui présentent cependant avec les phénomènes envisagés dans l'étude des cristaux, des caractères communs.

Rappelons d'abord comment Born a résolu le problème des vibrations des cristaux polaires.

Le caractère essentiel de ces cristaux consiste en ce que les actions entre les ions suivent, en première approximation, la loi de Coulomb, chaque ion étant regardé comme ayant une structure propre, rigide, dont l'existence est conditionnée par les lois des mécaniques atomiques et n'est pas influencée par l'existence des ions voisins. Supposons alors un réseau cristallin dans un état d'équilibre stable et déplaçons une particule du réseau en l'écartant de sa position d'équilibre; si nous l'abandonnons à elle-même, elle tendra à y revenir, en oscillant, sous l'action des forces dues aux particules qui l'entourent; ces oscillations donneront naissance à des ondes élastiques qui se propageront à travers tout le corps solide : l'élément simple sur lequel on est amené à raisonner est donc l'onde élastique. Born a étudié la propagation de telles ondes dans les cristaux polaires; pour un réseau à s particules de base, il est parvenu aux résultats ci-après :

Si l'on se donne une direction de propagation et si l'on s'impose la longueur d'onde, on montre que les fréquences ν des ondes peuvent être déterminées par une équation en ν^2 de degré $3s$ et qu'elles se divisent en deux groupes :

Le premier comprend des fréquences dites « *optiques* » qui, pour une longueur d'onde de propagation infinie dans le milieu, ont des valeurs finies différentes de zéro : ces valeurs sont appelées fréquences principales du cristal et leur nombre est $3(s-1)$; il apparaît immédiatement qu'il n'en existe pas pour des réseaux simples ($s = 1$). A ces fréquences principales correspondent des mouvements les uns par rapport aux autres des différents réseaux partiels de particules congruentes en lesquels on peut diviser le cristal, chacun de ces réseaux se comportant comme un ensemble indéformable. Ce sont ces fréquences qui peuvent être actives dans les spectres infrarouge et de diffusion; c'est à leur existence qu'il faut en particulier attribuer le phénomène de la réflexion sélective.

Le second groupe comprend des fréquences qui, pour une longueur d'onde de propagation infinie dans le milieu, ont une valeur limite nulle; ces fréquences sont dites fréquences « *acoustiques* » et l'on peut en général en distinguer trois pour une longueur d'onde donnée.

Pour des longueurs d'onde très grandes, il correspond à ces fréquences un mouvement d'ensemble des divers réseaux partiels : c'est la déformation élastique de la théorie ordinaire de l'élasticité.

L'étude du spectre de vibration du cristal doit d'autre part être complétée par l'indication d'une limitation caractéristique qui est imposée à ce dernier, due au fait que l'on est en présence d'un solide à structure discontinue; il ne peut s'y propager des ondes dont la demi-longueur d'onde est inférieure à la distance des particules les plus voisines; ceci interrompt à une certaine longueur d'onde λ_c le spectre de vibration. Cette propriété joue un rôle fondamental dans la théorie des chaleurs spécifiques du corps solide, en introduisant des fréquences limites [1].

La figure 1 donne, d'après les travaux de Lyddane et Herzfeld [2], l'aspect du spectre des fréquences d'un cristal à deux particules de base du type sel gemme, les courbes en traits pleins représentant les fréquences correspondant aux ondes longitudinales, celles en traits pointillés les fréquences relatives aux ondes transversales, étant entendu que les fréquences afférentes aux deux types d'ondes transversales sont confondues.

Au point de vue mécanique, le cristal jouit donc des propriétés d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-bande. Plus généralement, le nombre des bandes passantes est d'autant plus grand que le nombre des particules de base est élevé.

C'est avec ce comportement des cristaux que l'on a signalé des analogies en électricité [3] et en acoustique [4], mais les systèmes qui ont été étudiés jusqu'à présent, filtres électriques ou acoustiques,

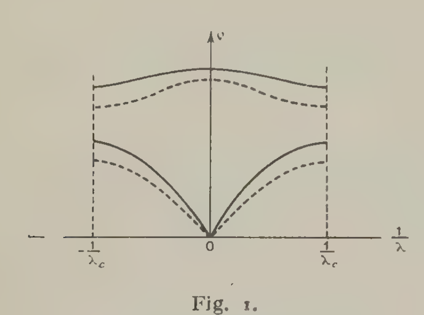


Fig. 1.

se référaient plutôt à la représentation schématique du cristal par des files linéaires de particules qu'à un réseau spatial. Nous allons voir que l'on peut pousser l'analogie plus loin et montrer que les composantes symétriques des courants dans certains réseaux triphasés jouent un rôle analogue aux ondes longitudinales et transversales de l'élasticité.

2. **Propagation des composantes symétriques dans une ligne indéfinie.** — Soit une ligne triphasée (*fig.* 2) indéfinie, supposée sans résistance, constituée par des tronçons identiques dont chaque phase présente une self-inductance L, chaque tronçon étant lié au suivant par un système formé de capacités C et C', C représentant la capacité d'une phase d'un tronçon par rapport à la terre et C' la capacité entre deux phases d'un même tronçon.

En prenant comme variables les intensités $i_{1,n}$, $i_{2,n}$, $i_{3,n}$ des courants dans le tronçon de rang n, les équations électriques relatives à ce tronçon s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C}i_{1,n-1}+\frac{2}{C}i_{1,n}+L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2}i_{1,n} \\
&\qquad -L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2}(i_{2,n}+i_{3,n})-\frac{1}{C}i_{1,n+1}=0, \\
&-\frac{1}{C}i_{2,n-1}+\frac{2}{C}i_{2,n}+L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2}i_{2,n} \\
&\qquad -L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2}(i_{3,n}+i_{1,n})-\frac{1}{C}i_{2,n+1}=0, \\
&-\frac{1}{C}i_{3,n-1}+\frac{2}{C}i_{3,n}+L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2}i_{3,n} \\
&\qquad -L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2}(i_{1,n}+i_{2,n})-\frac{1}{C}i_{3,n+1}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Introduisons les composantes symétriques, homopolaire, directe et inverse des courants

$$I_{h,n}=i_{1,n}+i_{2,n}+i_{3,n},$$

$$I_{d,n}=i_{1,n}+\alpha i_{2,n}+\alpha^2 i_{3,n},\qquad I_{i,n}=i_{1,n}+\alpha^2 i_{2,n}+\alpha i_{3,n},$$

1, α et α^2 étant les racines cubiques de l'unité; les trois équations (1) peuvent être remplacées par le groupe d'équations

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C}I_{h,n-1}+\frac{2}{C}I_{h,n}+L\frac{d^2}{dt^2}I_{h,n}-\frac{1}{C}I_{h,n+1}=0, \\
&-\frac{1}{C}I_{d,n-1}+\frac{2}{C}I_{d,n}+L\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2}I_{d,n}-\frac{1}{C}I_{d,n+1}=0, \\
&-\frac{1}{C}I_{i,n-1}+\frac{2}{C}I_{i,n}+L\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2}I_{i,n}-\frac{1}{C}I_{i,n+1}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Cherchons dans quelles conditions des ondes du type

$$A\,e^{2\pi i(\nu t-gn)}\qquad(i=\sqrt{-1})$$

peuvent se propager dans le système, ν étant la fréquence et g une grandeur inversement proportionnelle à la longueur d'onde

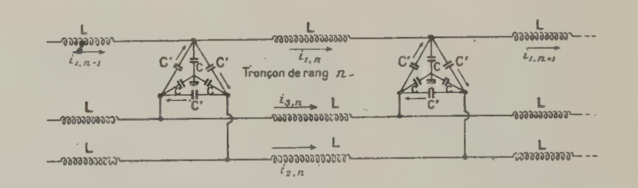


Fig. 2.

La première équation du groupe (2) donne

$$\nu_h=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}}\sin\pi g.$$

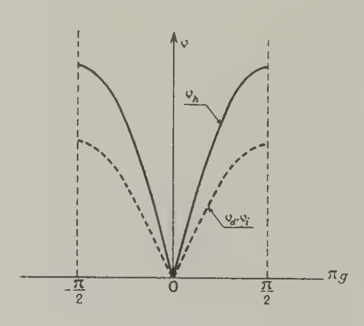


Fig. 3.

Les deux autres conduisent à la même relation

$$\nu_d,\ \nu_i=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{CL\left(1+3\frac{C'}{C}\right)}}\sin\pi g.$$

On peut alors tracer le spectre des fréquences; il présente l'aspect figuré (*fig.* 3).

Le système présente les propriétés d'un filtre passe-bas; d'autre part, son spectre de fréquences comportant une branche simple (ν_h) et une branche double (ν_d, ν_i), est tout à fait semblable à celui

d'un corps solide à une particule de base. Les composantes homopolaires des courants correspondent aux ondes longitudinales, les composantes polyphasées aux ondes transversales.

Notons, de plus, que l'on a à distinguer des vitesses de propagation différentes suivant que l'on considère les composantes homopolaires ou les composantes polyphasées, ces vitesses étant analogues aux vitesses des ondes longitudinales et transversales de la théorie de l'élasticité.

3. **Généralisation.** — Supposons une ligne triphasée indéfinie, de même structure que la précédente, mais formée par la répétition périodique de deux types de tronçons dont les phases ont respectivement pour selfs-inductances L et L' (*fig.* 4).

Prenons comme variables les intensités des cou-

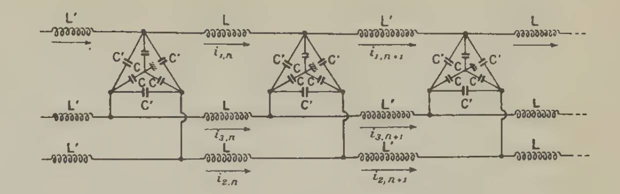


Fig. 4.

rants dans les selfs-inductances; les équations électriques des tronçons de rang n et $n+1$ s'écrivent respectivement

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C} i_{1,n-1} + \frac{2}{C} i_{1,n} + L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n} - \frac{1}{C} i_{1,n+1} = 0,\\
&-\frac{1}{C} i_{2,n-1} + \frac{2}{C} i_{2,n} + L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n} - \frac{1}{C} i_{2,n+1} = 0,\\
&-\frac{1}{C} i_{3,n-1} + \frac{2}{C} i_{3,n} + L\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n} - L\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n} - \frac{1}{C} i_{3,n+1} = 0,
\end{aligned}\right\}\quad (n)$$

et

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C} i_{1,n} + \frac{2}{C} i_{1,n+1} + L'\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n+1} - \frac{1}{C} i_{1,n+2} = 0,\\
&-\frac{1}{C} i_{2,n} + \frac{2}{C} i_{2,n+1} + L'\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n+1} - \frac{1}{C} i_{2,n+2} = 0,\\
&-\frac{1}{C} i_{3,n} + \frac{2}{C} i_{3,n+1} + L'\left(1+2\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} i_{3,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{1,n+1} - L'\frac{C'}{C}\frac{d^2}{dt^2} i_{2,n+1} - \frac{1}{C} i_{3,n+2} = 0.
\end{aligned}\right\}\quad (n+1)$$

Introduisons les composantes symétriques

$$I_{h,n} = i_{1,n} + i_{2,n} + i_{3,n},$$

$$I_{d,n} = i_{1,n} + \alpha\, i_{2,n} + \alpha^2 i_{3,n}, \qquad I_{i,n} = i_{1,n} + \alpha^2 i_{2,n} + \alpha\, i_{3,n}.$$

Les équations (n) et $(n+1)$ peuvent être remplacées respectivement par les deux groupes d'équations

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C} I_{h,n-1} + \frac{2}{C} I_{h,n} + L\frac{d^2}{dt^2} I_{h,n} - \frac{1}{C} I_{h,n+1} = 0,\\
&-\frac{1}{C} I_{d,n-1} + \frac{2}{C} I_{d,n} + L\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} I_{d,n} - \frac{1}{C} I_{d,n+1} = 0,\\
&-\frac{1}{C} I_{i,n-1} + \frac{2}{C} I_{i,n} + L\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} I_{i,n} - \frac{1}{C} I_{i,n+1} = 0,
\end{aligned}\right\}\ (n)'$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{C} I_{h,n} + \frac{2}{C} I_{h,n+1} + L'\frac{d^2}{dt^2} I_{h,n+1} - \frac{1}{C} I_{h,n+2} = 0,\\
&-\frac{1}{C} I_{d,n} + \frac{2}{C} I_{d,n+1} + L'\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} I_{d,n+1} - \frac{1}{C} I_{d,n+2} = 0,\\
&-\frac{1}{C} I_{i,n} + \frac{2}{C} I_{i,n+1} + L'\left(1+3\frac{C'}{C}\right)\frac{d^2}{dt^2} I_{i,n+1} - \frac{1}{C} I_{i,n+2} = 0.
\end{aligned}\right\}\ (n+1)'$$

Étudions la propagation des composantes homopolaires.

Cherchons dans quelles conditions des ondes du type

$$I_{h,n} = A\, e^{2\pi i(\nu t - gn)}, \qquad I_{h,n+1} = A'\, e^{2\pi i(\nu t - gn)}$$

peuvent se propager, ν et g ayant la même signification que plus haut. En portant ces valeurs dans les premières équations des groupes $(n)'$ et $(n+1)'$, il vient le système d'équations linéaires et homogènes en A et A'

$$A\left[\frac{2}{C} - 4\pi^2\nu^2 L\right] - \frac{1}{C} A'\left[e^{2\pi i g} + 1\right] = 0,$$

$$-\frac{1}{C} A\left[1 + e^{2\pi i g}\right] + A'\left[\frac{2}{C} - 4\pi^2\nu^2 L'\right] = 0.$$

La condition de compatibilité conduit à l'équation en ν

$$4\pi^4\nu^4 LL' - 2\pi^2\nu^2\,\frac{1}{C}(L+L') + \frac{1}{C^2}\sin^2\pi g = 0,$$

d'où

$$\nu_h^{+} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CLL'}\left[L + L' + \sqrt{(L+L')^2 - 4LL'\sin^2\pi g}\right]},$$

$$\nu_h^{-} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CLL'}\left[L + L' - \sqrt{(L+L')^2 - 4LL'\sin^2\pi g}\right]},$$

Le spectre des fréquences correspondant aux composantes homopolaires se trace alors immédiatement; il comporte deux branches : l'une, corres-

pondant à ν_h^- qui part de zéro et atteint un maximum

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{CL}} \quad \text{pour} \quad \pi g = \frac{\pi}{2},$$

l'autre, correspondant à ν_h^+, qui est comprise entre deux valeurs finies

$$(\nu_h^+)_{\pi g=0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2(L+L')}{CLL'}}, \qquad (\nu_h^+)_{\pi g=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{CL'}}.$$

La figure 5 en donne l'aspect (courbes en traits pleins).

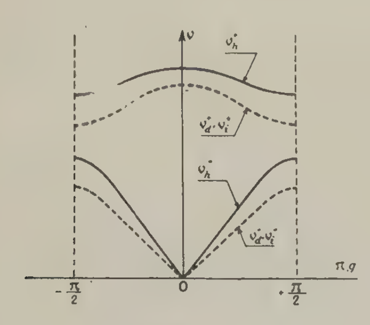


Fig. 5.

L'examen des équations $(n)'$ et $(n+1)'$ montre d'autre part que les composantes directes et inverses ont le même spectre de fréquences; de plus, en posant

$$\mathcal{L} = L\left(1 + 3\frac{C'}{C}\right), \qquad \mathcal{L}' = L'\left(1 + 3\frac{C'}{C}\right),$$

il apparaît que la recherche du spectre relatif aux composantes polyphasées se conduit de la même manière que dans le problème précédent; ce spectre comprendra donc deux branches qui sont représentées en pointillé sur la figure 5.

L'examen de cette figure montre l'identité du spectre de fréquences du système électrique considéré avec celui d'un réseau cristallin à deux particules de base; là encore les composantes homopolaires jouent un rôle analogue aux ondes longitudinales, les composantes polyphasées aux ondes transversales.

Nous pouvons remarquer de plus que pour une longueur d'onde de propagation infinie dans le système, on a toujours, pour les branches analogues aux branches acoustiques, $A = A'$; ceci correspond à la déformation d'ensemble du milieu élastique; et que, pour les branches analogues aux branches optiques, dans les mêmes circonstances, on a

$$\frac{A'}{A} = -\frac{L}{L'} \quad \text{ou} \quad -\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}'},$$

ce qui correspond aux mouvements les uns par rapport aux autres des différents réseaux partiels du réseau cristallin.

Remarque. — En multipliant le nombre de tronçons différents qui se répètent périodiquement sur la ligne, on pourrait obtenir le système électrique analogue à un réseau à un nombre quelconque de particules de base.

Manuscrit reçu le 6 mars 1943.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Brillouin, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris, 1938, p. 325.
[2] *Phys. Rev.*, 1938, **54**, p. 846.
[3] L. Brillouin, *R. G. E.*, 1937, **42**, p. 771 et 803.
[4] M. Parodi, *R. G. E.*, 1939, **45**, p. 521.

SUR LES RÉGIMES DE RESOLUTION D'UN JET LIQUIDE SOUS L'INFLUENCE D'UN SOUFFLAGE AXIAL

Par G. LITTAYE et R. SIESTRUNCK.
Laboratoire de Mécanique des Fluides de Paris.

Sommaire. — Les auteurs étudient la résolution d'un jet liquide à faible vitesse sous l'action d'un courant d'air dont la vitesse croît de 0 à 250 m : s. Ils sont amenés à distinguer un seuil de pulvérisation, vitesse au delà de laquelle les gouttes obtenues par la résolution capillaire du jet continuent à se diviser en gouttes plus petites et un seuil d'atomisation, vitesse au delà de laquelle le jet se résoud en un brouillard de gouttes très fines. Les auteurs expliquent cette action de l'air sur le jet par l'effet du sillage que le gaz en mouvement produit derrière les gouttes et de la centrifugation subie par celles-ci sous l'action de la turbulence du courant d'air. La théorie élémentaire exposée semble cadrer aussi bien avec les valeurs expérimentales obtenues pour les divers seuils, qu'avec la variation observée de la longueur de la partie continue de la veine liquide, en fonction des vitesses respectives du jet et du courant d'air.

La résolution des jets liquides en gouttes dans une atmosphère libre a été étudiée par différents auteurs, qui ont précisé les régimes obtenus suivant la vitesse du liquide : résolution capillaire (Savart, lord Rayleigh), régimes oscillants [1], et enfin aux hautes vitesses l'atomisation [2] utilisée dans l'injection des moteurs Diesel. Afin de schématiser les phénomènes de la carburation, nous avons étudié l'influence d'un soufflage axial sur la résolution d'une veine liquide.

La méthode utilisée a été la suivante :

1. **Veines liquides.** — Les veines sont obtenues en faisant passer le liquide sous pression dans un ajutage terminé par une portion capillaire (diamètre des orifices : de 0,25 mm à 1 mm). La mesure de la vitesse à la sortie du capillaire nécessite une mesure du diamètre de l'orifice, et un étalonnage du débit en fonction de la pression d'admission; toutefois lorsque la portion capillaire est assez allongée pour que le régime de Poiseuille s'y établisse, on peut avoir directement la relation entre la pression d'admission et la vitesse de sortie du jet.

Le théorème de Bernoulli nous donne en effet :

$$(p + p_0) + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2 + \int_A^B j\, ds,$$

j étant la perte de charge unitaire qui vaut en régime laminaire

$$j = \frac{128\,\eta}{\pi D^4} Q \qquad \text{où } Q = \frac{\pi D^2}{4} V.$$

Donc

$$p = \frac{\rho}{2} V^2 + \frac{32\,\eta\, l}{D^2} V,$$

et, en exprimant p en kg/cm² et v en m/s

$$p = 0{,}051\, V^2 + \frac{32\,\eta\, l}{D^2} 10^{-4} V.$$

Dans les conditions d'établissement de la formule, celle-ci se vérifie bien ; un très petit nombre de mesures de débit suffisent à préciser l'allure de la courbe p(Q) au voisinage d'une valeur donnée de la pression. Traduisons les résultats par une expression de la forme

$$p = 0{,}051\, V^2 + a V,$$

la valeur expérimentale de a donne pour D une valeur qui concorde en général fort bien avec la mesure directe du diamètre. Pour les orifices ne présentant pas une portion capillaire suffisamment allongée, la vérification numérique est moins bonne.

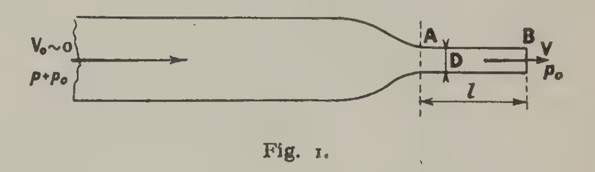


Fig. 1.

Les vitesses maxima atteintes pour l'eau étaient de l'ordre de 20 m/s.

2. **Soufflage.** — L'ajutage précédent est placé dans l'axe d'une tuyère où se détend l'air comprimé de la distribution parisienne; pour permettre les changements fréquents d'ajutage, la partie amont de la tuyère, d'une pièce avec l'ajutage, était mobile; elle se fixait à la partie aval au moyen d'un rodage assurant la fixité et l'étanchéité aux grandes vitesses d'air. Les dimensions respectives de l'ajutage et de la tuyère étaient choisies de façon à obtenir des vitesses suffisantes sans avoir à craindre que l'ajutage entre en vibration sous l'action du courant d'air, vibrations qui peuvent s'amplifier jusqu'à la rupture.

La vitesse d'écoulement de l'air était mesurée au

moyen d'un pitot mobile à l'extérieur de la tuyère; suivant la vitesse, le pitot était relié à un manomètre à eau ou à mercure. Les vitesses ont leurs valeurs maxima à la sortie de la tuyère, où elles peuvent atteindre 250 m/s; en déplaçant le pitot dans le courant, on constate un amortissement et un épanouissement du jet assez rapides : pour un écoulement d'un diamètre initial de 2 cm à 170 m/s, on tombe à 150 m/s au bout de 6 à 7 cm de parcours; néanmoins la variation de vitesse est faible sur les premiers centimètres du jet, notamment tout le long de la portion continue de la veine liquide, où nous pouvons admettre une vitesse de courant d'air constante.

3. **Prises de vue**. — Une source ponctuelle, constituée par l'étincelle de décharge d'un condensateur dans un éclateur approprié, projette l'ombre

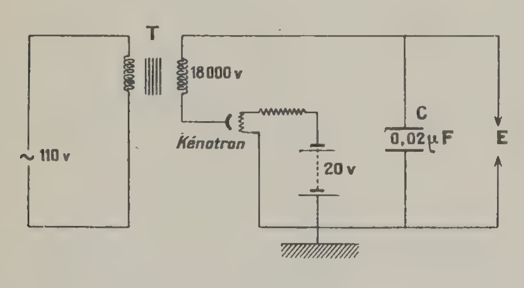


Fig. 2.

de la veine liquide sur un papier photographique enregistreur; la durée d'éclatement est de l'ordre de 10^{-5} s.

Nous avons mis en évidence les résultats suivants :

A. Influence de la forme de l'ajutage. — Le mécanisme de la résolution est fortement influencé par la forme de l'ajutage. Déterminons par exemple l'allure du sillage d'un tube capillaire épais en représentant en fonction de la distance à l'orifice la pression moyenne qui règne à l'aval du capillaire sur l'axe de ce dernier lorsque celui-ci ne débite pas; la courbe représentative à la forme (1); la courbe (2) donne l'indication du pitot hors du sillage, et montre l'amortissement du courant d'air. A une distance de l'orifice qui est de l'ordre du diamètre extérieur du capillaire, soit sensiblement à la fin du sillage, on observe un gradient de pression considérable, qui produit l'éclatement du jet à cet endroit, indépendamment des vitesses du liquide et de l'air, pourvu que cette dernière soit suffisante; la zone de dépression au voisinage même de l'orifice amène la formation d'une gaîne liquide autour de l'extrémité du capillaire, gaîne à travers laquelle le jet passe intact.

La pulvérisation du jet d'eau est d'autant plus facile que l'ajutage présente un sillage plus important. Afin d'étudier d'une façon indépendante l'effet sur la veine liquide du courant d'air lui-même,

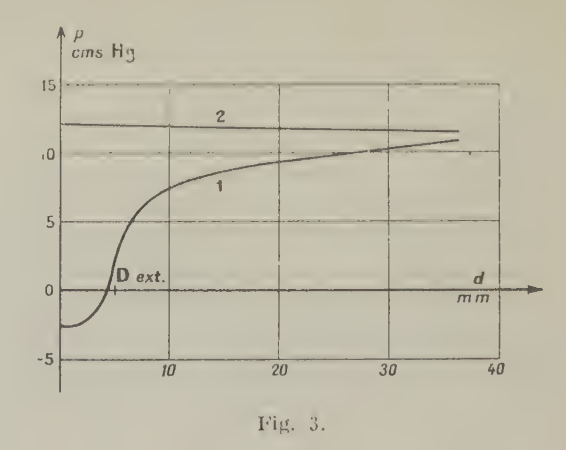


Fig. 3.

nous avons utilisé des capillaires minces, présentant un sillage très réduit, et avec lesquels on peut, en forçant la vitesse de soufflage, provoquer la pulvérisation à l'orifice même du capillaire; ce dispositif a soulevé des difficultés dues à des vibrations transversales de l'ajutage entretenues par les pulsations turbulentes de l'air à haute vitesse.

B. Régime a guttation. — Nous avons entrepris à l'occasion de l'étude de la résolution aux basses vitesses du courant d'air une vérification des résultats d'Haenlein relatifs aux jets non soufflés, vérification qui a été très satisfaisante. Par contre, nous avons constaté que les hypothèses utilisées par Weber dans ses calculs ne correspondent pas au processus de la résolution oscillante; ces hypothèses sont en effet les suivantes :

La rupture du jet a lieu lorsque l'amplitude des oscillations dépasse une certaine valeur bien déterminée pour un orifice donné;

La longueur d'onde des oscillations transportées par le jet est celle qui correspond à la longueur de résolution minima.

Or, on constate en général que les oscillations s'amortissent avant la rupture du jet, pour donner une résolution très semblable à celle obtenue en régime capillaire. D'autre part pour obtenir une courbe de résolution qui soit, au moins qualitativement, semblable à la courbe expérimentale, il faut raccorder les courbes théoriques correspondant au régime capillaire avec influence de l'air et au régime oscillant de la façon indiquée (*fig.* 4); on voit que pour une vitesse du jet supérieure à la vitesse de raccordement, le régime capillaire donne une longueur de résolution inférieure au régime oscillant, et que par conséquent, rien ne justifie l'établissement de ce dernier, dans les hypothèses du calcul.

La seule modification apportée à ces phénomènes par un soufflage faible est une stabilisation plus rapide au voisinage du changement de régime de

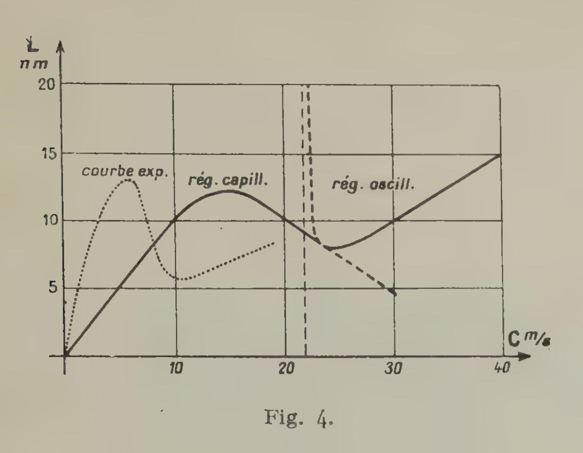


Fig. 4.

résolution, ce qui supprime la portion de la courbe de résolution correspondant aux grandes longueurs du jet, comme on le voit (*fig.* 5).

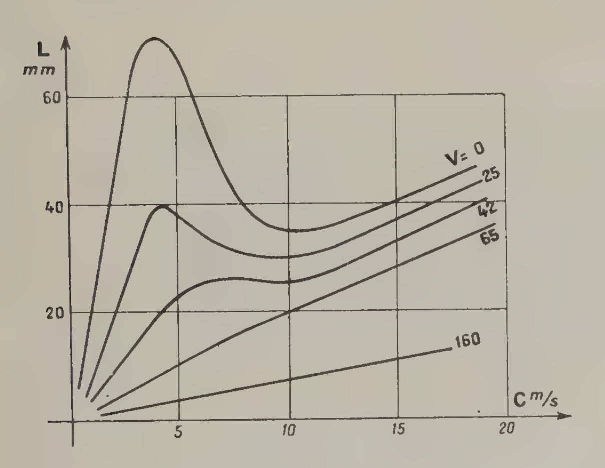


Fig. 5.
V vitesse de l'air; C vitesse du jet;
Diamètre de l'orifice : $D = 0{,}038$ cm.

Mesure des longueurs de résolution. — Le caractère peu constant des résolutions demande une détermination statistique des longueurs de résolution :

a. En général, on a pris plusieurs vues dans les mêmes conditions de vitesse; la moyenne de 5 vues suffit;

b. On a aussi utilisé des vues en lumière continue (pose 5 à 10 s), avec une lampe à filament rectiligne diaphragmée; on obtient une longueur de résolution apparente qui est nécessairement inférieure à la valeur moyenne de la longueur de résolution, mais l'allure qualitative des phénomènes est bien conservée.

Seuil de pulvérisation. — Nous avons constaté que *les phénomènes qui révèlent l'influence du courant d'air sur le régime de résolution dépendent essentiellement de la turbulence de l'air*; ce que l'on peut

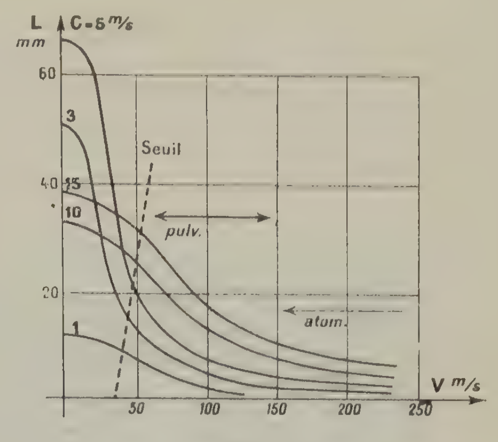


Fig. 6.

justifier quantitativement par les considérations théoriques suivantes. Dans tous les régimes de guttation correspondant aux basses vitesses V de l'air, les gouttes émises ont un diamètre de l'ordre de celui de la veine liquide; *à partir d'une valeur* V_0 *bien déterminée*, les gouttes émises continuent à se subdiviser (*fig.* 7 et 8). Le seuil V_0 dépend de la vitesse C de la veine liquide suivant une loi qu'on peut obtenir en admettant que les gouttes subissent un effet de sillage dû au courant d'air et une centrifugation due à la turbulence de ce dernier.

Le sillage qui s'établit derrière une goutte [1] produit une succion moyenne sur toute la surface de la goutte agitée, qui tend à faire éclater la goutte; cette succion est de la forme

$$\Delta_1 p = C_p (V - C)^2 \frac{\rho}{2}.$$

La turbulence du courant d'air considérée comme constituée par des masses tourbillonnaires entraînées par le courant général, engendre des rotations qui tendent aussi, par effet centrifuge, à faire éclater la goutte; une rotation ω produit à la surface de la goutte de rayon R une surpression moyenne ayant la valeur

$$\Delta_2 p = \frac{1}{S} \int p \, dS, \qquad \text{où } p = \rho' \omega^2 r \int_0^r \frac{d\varphi}{ds},$$

soit

$$\Delta_2 p = \rho' \omega^2 \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \, d\theta = \rho' \omega^2 \frac{R^2}{3}.$$

[1] L'établissement et la stabilité du sillage derrière une goutte en mouvement non uniforme semblent être assurés par l'importance de la vitesse V par rapport à c, et la préturbulence de la couche limite le long de la partie libre du jet.

Or si nous admettons que la tuyère présente aux différentes vitesses V une turbulence isotrope et des écoulements semblables, la rotation quadratique moyenne ω doit être proportionnelle à la vitesse

$$\omega = KV, \qquad \text{où } K = \sqrt{20}\,\pi U \sqrt{\int_0^\infty \frac{n^2}{V^2} VF(n) \frac{dn}{V}},$$

U désignant l'agitation relative quadratique moyenne et F (n) le spectre de fréquences. Portons cette valeur dans $\Delta_2 p$ et écrivons que les gouttes éclateront à partir d'une vitesse V pour laquelle la somme $\Delta_1 p + \Delta_2 p$ dépasse la tension superficielle d'une fraction α, les modifications locales de pression ne pouvant plus être alors compensées par des variations locales de courbure; il vient

$$\rho' \frac{\omega^2 R^2}{3} + \frac{\rho}{2} C_p (V - C)^2 \geq \frac{2 A \alpha}{R},$$

ou

$$C \leq V - \sqrt{\lambda - \lambda' V^2},$$

où

$$\lambda = \frac{4 A \alpha}{\rho R C_p} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{2 \rho'}{3 \rho} \frac{K^2 R^2}{C_p}.$$

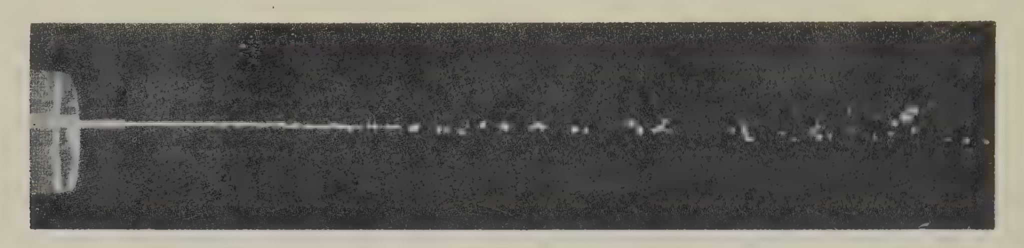


Fig. 7.
R = 0,019 cm ; c = 10 m/s (eau) ; V = 45 m/s.

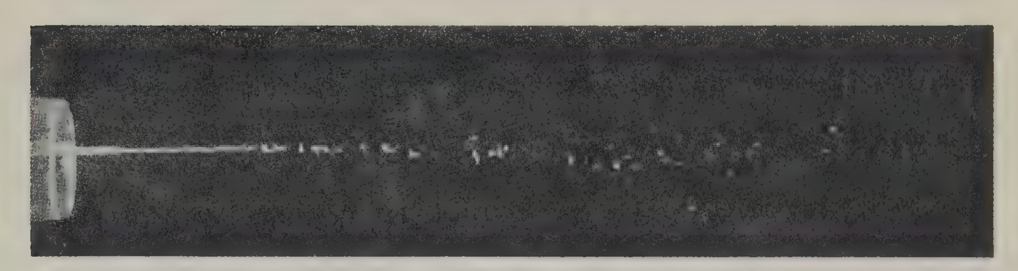


Fig. 8.
R = 0,019 cm ; c = 10 m/s (eau) ; V = 55 m/s.

La relation ainsi trouvée est en parfait accord avec le fait observé expérimentalement, que le seuil nécessite, même pour les vitesses faibles du liquide $C \sim 0$ une vitesse de soufflage $V_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{1 + \lambda'}}$ nettement différente de zéro (de l'ordre de 35 m/s pour un diamètre du jet de 1/2 mm). D'autre part, la courbe expérimentale est très facilement représentable par une formule du type précédent. Les valeurs de λ et λ' ainsi déterminées fournissent pour l'ajutage décrit ci-dessus une valeur de α de l'ordre de 0,5 si l'on adopte pour C_p la valeur 0,2 calculable à partir de la répartition classique de la pression dans un écoulement supra-critique autour d'une sphère [3].

C. Régime de pulvérisation. — Lorsque V croît à partir de V_0, l'influence de la turbulence du courant d'air se fait sentir sur le mode de résolution même de la veine; la plupart du temps, la partie continue du jet présente à son extrémité des renflements de liquide (*fig.* 9), dus vraisemblablement à une amplification par effet de sillage des oscillations naturelles irrégulières du jet. Les étranglements séparant deux renflements consécutifs disparaissent ensuite; les photographies révèlent alors l'existence dans le courant d'air d'amas liquides uniformément répartis qui éclatent définitivement en gouttes fines. Soient dans la partie continue du jet deux renflements à la distance l : le sillage du premier, en dépression, aspire la partie de la veine qui le joint au front du deuxième, en surpression; la différence de pression est de la forme :

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} C_p (V - C)^2,$$

et produit une aspiration vers le renflement amont de vitesse moyenne

$$v \sim \frac{\Delta p}{\rho' l} t.$$

Écrivons que la rupture a lieu lorsque le débit Q aspiré est suffisant pour que la section S de la partie amincie soit coupée par l'agitation de turbulence

$$Q = \int_0^T \frac{\Delta p t}{\rho' l} S(t)\,dt,$$

T étant le temps de résolution. En admettant que Δp reste constante pendant la résolution, et que la section critique S varie peu avec V, on obtient pour la longueur moyenne de résolution

$$L = CT = K\frac{C}{\sqrt{\Delta p}} = \frac{\lambda C}{V - C}.$$

Cette formule à une seule constante λ représente parfaitement le réseau des courbes expérimentales (*fig.* 6) dans l'intervalle de vitesse V où le jet se pulvérise.

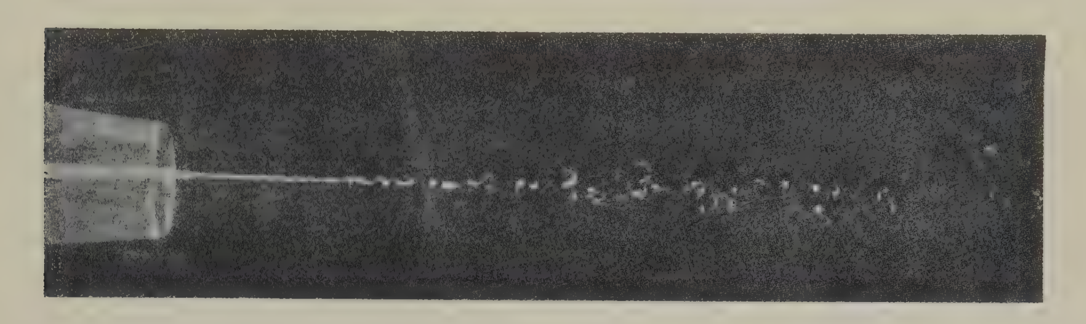


Fig. 9.
R = 0,019 cm; c = 10 m/s (eau); V = 80 m/s.

D. Régime d'atomisation. — Pour les vitesses supérieures à 150 m/s, la turbulence du courant d'air est tellement élevée, et le frottement sur le liquide tellement fort, que la veine éclate instantanément en gouttes microscopiques; c'est le régime d'atomisation.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1942.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Haenlein, *Forschung*, 1931. — Weber, *Z. F. a. M. ü. M.*, 1931, **11**, p. 136.
[2] Woltjen, *Dissert. Darmstadt*, 1925. — Sass, *Kompressorlose Dieselmaschinen*, 1929. — Sauter, *NACA, T. N.*, 396.
[3] *Handbuch der Exp. Physik.*, **4**, 3ᵉ partie, p. 295.

EMPLOI D'UNE LAMPE A VAPEUR DE MERCURE CONTENANT DE L'ARGON POUR L'OBTENTION D'UN SPECTRE DE RÉFÉRENCE DANS LE PROCHE INFRAROUGE

Par Mme Renée HERMAN, Louis HERMAN et Junior GAUZIT.

La lampe à vapeur de mercure construite par la Société Gallois et Cie d'après les indications de G. Déjardin (*Bulletin Soc. franc. de Phys.*, 1934, p. 15 S.) a été avantageusement employée par nous pour obtenir un spectre de comparaison dans l'intervalle spectral 7 000-8 500 Å. Son émission est identique, dans cette région, à celle d'une petite lampe à luminescence (veilleuse) à atmosphère d'argon, mais elle est notablement plus intense. Sa brillance est également plus grande que celle d'une veilleuse à atmosphère de néon. Les raies de l'argon sont d'ailleurs plus nombreuses et plus régulièrement espacées que celles du néon, ce qui permet des interpolations plus sûres. On pourrait utiliser aussi, dans le même but, une lampe « Tungar », qui émet un spectre de l'argon plus intense, mais cette lampe présente l'inconvénient de fournir en même temps un spectre continu dû au filament de tungstène.

Nous avons comparé le spectre de la petite lampe à mercure à celui de la lampe en quartz du type R.L. de la Société Gallois et Cie. Le spectre de raies de cette dernière source est fortement masqué par un fond continu intense dû surtout à la température élevée de l'arc en régime normal. On parvient à éliminer en grande partie ce fond continu en refroidissant l'arc par un courant d'air provenant d'un ventilateur. Une faible partie du spectre continu pourrait provenir de l'émission de la molécule Hg_2. On sait en effet que les atomes excités 7^1S, 7^3S, 6^1P, 7^1P, 6^3P, 7^3P, peuvent, par chocs avec les atomes 6^1S, donner naissance à des molécules Hg_2 excitées, de faible énergie de dissociation. Le retour à l'état fondamental, lui-même instable, conduit à l'émission d'un spectre à peu près continu (S. Mrozowski, *Zeits. für Phys.*, 1937, 104, p. 288; 1937, 106, p. 458). La comparaison avec le spectre du mercure obtenu par T. Suga, M. Kamiyana et Y. Sugiura (*Scient. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res.*, Tokyo, 1937, 34, p. 32) montre que la raie 7729 Å (7^1S_0-8^1P_1) est fortement exaltée dans l'arc R.L. Il en résulte la présence de nombreux atomes excités 8^1P_1 qui peuvent former, avec un atome 6^1S_0, une molécule Hg_2 excitée. Là encore, le retour au niveau fondamental s'accompagnerait d'un rayonnement continu, non encore observé à notre connaissance, situé dans l'ultraviolet extrême. En outre, des transitions entre deux états excités pourraient donner lieu à l'émission d'un rayonnement rouge et même infrarouge. Le spectre de la petite lampe présente l'avantage, par rapport à celui de l'arc de grande puissance, d'être formé de raies fines (température peu élevée) sans fond continu notable. Les largeurs des raies fournies par les deux lampes ont été comparées en projetant les anneaux à l'infini d'un étalon de Pérot et Fabry sur la fente d'un spectrographe. Dans l'arc, seule la raie 4 077 Å (6^3P_1-7^1S_0) se montre fine, tandis que les raies 4 047 Å (6^3P_0-7^3S_1), 4 358 Å (6^3P_1-7^3S_1) et 5 461 Å (6^3P_2-7^3S_1) ont une largeur de plusieurs angströms. Cet élargissement n'est évidemment dû ni à l'amortissement par rayonnement, ni à l'effet Doppler d'origine thermique, mais pourrait résulter de chocs moléculaires (forces de Van der Waals). S'il en était ainsi, la raie 4 077 Å serait affectée de la même manière, puisqu'elle peut également donner lieu à la formation de molécules Hg_2. L'élargissement observé est sans doute provoqué par l'effet Stark dû au champ intermoléculaire. On sait d'ailleurs que les raies les moins sensibles à cet effet sont justement les raies d'intercombinaison, telles que 4 077 Å.

La petite lampe neuve fournit le spectre AI dans l'infrarouge et le spectre Hg I dans la région visible. L'énergie d'excitation des raies du mercure dans cette dernière région est en effet plus faible que celle de l'argon. Néanmoins, la tension appliquée à la lampe suffit pour porter les atomes d'argon au niveau métastable. Des chocs ultérieurs feront passer l'atome métastable aux niveaux correspondant aux raies infrarouges avec une énergie moindre que celle qu'exige l'excitation du niveau 8^1P_1 du mercure, par exemple. Lorsque la lampe est usagée, le spectre du mercure s'affaiblit, tandis que AI devient finalement prépondérant, par suite de la disparition progressive du mercure. Parfois, on constate aussi l'apparition de raies du baryum dues à la désagrégation du revêtement d'oxydes des électrodes incandescentes.

Ces particularités de la décharge dans un mélange de deux gaz nous ont conduits à nous reporter à des expériences antérieures effectuées par l'un de nous sur des mélanges d'azote et d'argon, excités par choc électronique. A pression relativement élevée, on obtenait un spectre de l'azote intense, tandis qu'aux pressions plus faibles (de l'ordre du millimètre de mercure), on obtenait un spectre de l'argon à peu près pur, sous une tension assez faible.

En résumé, du point de vue qui nous intéresse, la petite lampe de G. Déjardin présente les avantages suivants : maniement commode, bonne luminosité, spectre formé de raies fines, nombreuses et assez régulièrement espacées.

PERTURBATIONS APPORTÉES AUX PHÉNOMÈNES D'ÉLECTROPHOTOLUMINESCENCE PAR UNE IRRADIATION INFRAROUGE

Par Georges DESTRIAU.
École Centrale des Arts et Manufactures, Paris,
et Laboratoire de Physique des travaux pratiques du P. C. B. Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Le phénomène d'illumination fugace, observé lorsqu'on soumet à l'action d'un champ électrique un sulfure luminescent préalablement excité aux rayons de courte longueur d'onde, est extrêmement sensible à l'action des radiations rouges et du proche infrarouge. Pour l'annihiler totalement, il suffit d'une énergie infrarouge bien inférieure à celle qui produirait un effet extincteur appréciable sur la phosphorescence.

En dehors de cette action, le champ accélère l'action extinctrice normale des radiations infrarouges sur la phosphorescence. Compte tenu de l'action extinctrice propre du champ, l'extinction est plus grande lorsqu'on fait agir simultanément le champ et les radiations infrarouges.

Enfin, les radiations infrarouges agissent faiblement et de façon très fugace sur le phénomène de luminescence propre, en champ constant la première illumination est plus faible après une irradiation infrarouge intense. En champ variable l'effet reste inappréciable.

1. **Introduction**. — Dans une note précédente [1] j'ai étudié plus en détail les phénomènes complexes, illumination fugace, extinction, inversion présentés par les sulfures phosphorescents préalablement irradiés aux rayons de courte longueur d'onde, puis soumis à l'action des champs électriques sinusoïdaux de fréquence industrielle 50 p : sec. J'ai déjà eu l'occasion de signaler dans les publications antérieures (*voir* bibliographie de la note ci-dessus) que l'allure des phénomènes était modifiée par l'irradiation aux rayons de grande longueur d'onde (rouge et proche infrarouge), c'est l'étude quantitative de ces modifications qui fait l'objet de la présente note. Comme dans le travail précédent, les substances sont isolées dans l'huile et les électrodes métalliques protégées par une lamelle de mica, de manière à ce qu'il ne passe aucun courant par conductibilité.

2. **Action infrarouge sur la somme de lumière libérée à l'illumination fugace**. — Le phénomène d'illumination fugace est extrêmement sensible à l'action extinctrice des radiations infrarouges, il suffit d'une énergie infrarouge extrêmement faible pour l'annihiler totalement, énergie infrarouge bien inférieure d'ailleurs à celle qui est nécessaire pour produire un effet extincteur appréciable sur la phosphorescence visible. Afin d'étudier quantitativement cette action extinctrice, j'ai irradié la substance aux rayons X de manière uniforme et durant un temps suffisamment long (40 sec) pour atteindre la valeur limite de la brillance, après quoi la substance est soumise à l'action d'une source infrarouge durant un temps t au bout duquel l'application du champ électrique fournit à l'illumination fugace une somme de lumière S fonction décroissante de t. Le flux infrarouge peut être réduit dans un rapport connu à l'aide de diaphragmes convenables, ce qui permet d'étudier le phénomène avec des sources infrarouges d'intensités variables.

Dans le cas de susbtances à évolution lente comme le sulfure de zinc (Guntz n° 107) pour lequel le déclin naturel de la somme de lumière à l'illumination fugace s'étend sur plusieurs jours, les courbes ainsi obtenues peuvent être utilisées sans correction (*fig.* 1), le déclin observé sous l'influence des rayons infrarouges s'étendant au plus sur quelques minutes pendant lesquelles la décroissance naturelle de la somme de lumière à l'illumination fugace est inappréciable.

Les flux infrarouges (déterminés à la cellule photoélectrique) pour les diaphragmes nos 1-2-3-4 sont entre eux comme les nombres 10,8-5,4-2,7-1. On pourrait songer à représenter l'action infrarouge sur l'illumination fugace par une expression identique à celle proposée par W. L. Lewschin, W. Antonow Romanowsky et L. A. Timmerman [2] pour l'extinction infrarouge de la phosphorescence visible

$$\frac{B}{B_0} = e^{-aL_R};$$

L_R, somme de lumière infrarouge;
B_0, brillance naturelle;
B, brillance après irradiation infrarouge;
a, une constante.

En remplaçant ici les brillances par les « sommes de lumière », on aurait

$$\frac{S}{S_0} = e^{-bL_R}.$$

Or, l'allure des courbes de la figure 1 n'est pas exponentielle au moins dans le début de la décrois-

sance (chute rapide au début de l'extinction), de plus, l'extinction ne dépend pas uniquement de la somme totale de lumière infrarouge reçue.

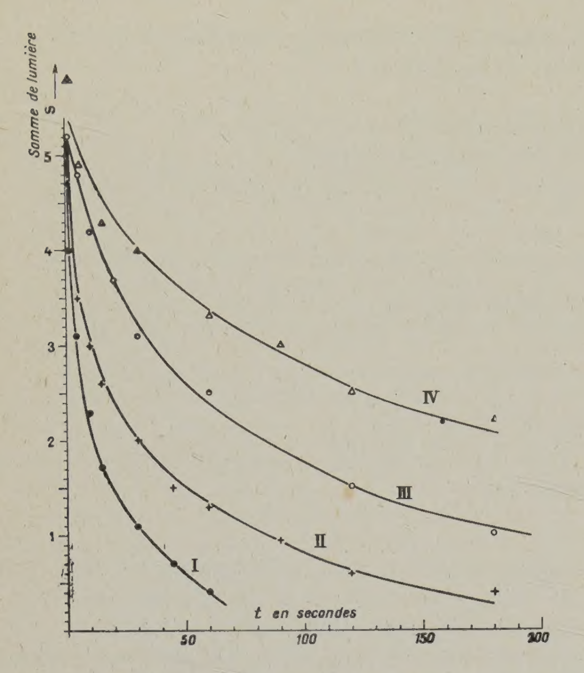


Fig. 1. — Extinction infrarouge de l'illumination fugace (sulfure à évolution lente).

Pour avoir $S = 1,25$, il faut, en effet, d'après les courbes de la figure 1

t.	Diaphragme.	Somme de lumière I-R.
25 sec	1	25.10,8 = 270
65 »	2	65. 5,4 = 361
150 »	3	150. 2,7 = 405

Pour avoir $S = 2$, il faut de même

12 sec	1	12.10,8 = 130
30 »	2	30. 5,4 = 162
82 »	3	82. 2,7 = 221
200 »	4	200. 1 = 200

Pour avoir $S = 3$, il faut

5 sec	1	5.10,8 = 54
10 »	2	10. 5,4 = 54
36 »	3	36. 2,7 = 97
84 »	4	84. 1 = 84

Pour produire une même extinction, il semble que la somme de lumière infrarouge soit d'autant plus élevée que l'intensité de la source infrarouge est plus faible.

Dans le cas de sulfures à évolution plus rapide, tels que le sulfure mixte zinc-cadmium, il faut tenir compte dans l'évaluation des rapports d'extinction de l'évolution naturelle de la somme de lumière à l'illumination fugace. Les courbes de la figure 2 fournissent l'évolution de la somme de lumière libérée à l'illumination fugace en fonction du temps t écoulé de la fin d'excitation aux rayons X jusqu'à l'action du champ, l'évolution s'effectuant soit en présence de flux infrarouges d'intensités diverses (courbes I-II-III-IV), soit en dehors de toute irradiation infrarouge (courbe V).

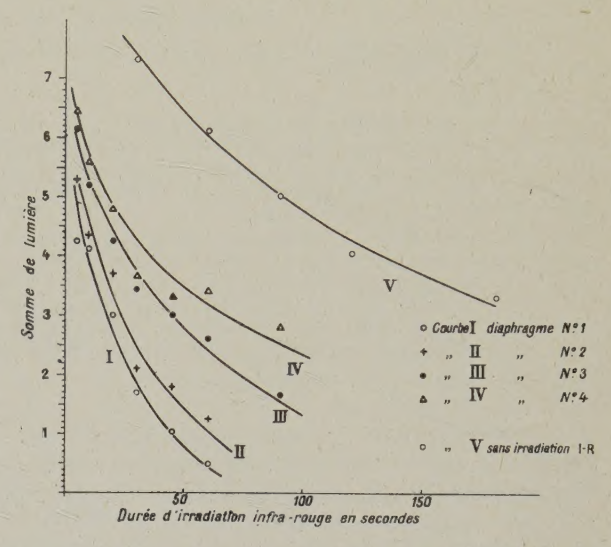


Fig. 2. — Évolution dans le temps de l'illumination fugace en présence d'un faisceau infrarouge (sulfure à évolution rapide).

Le rapport d'extinction pour une durée t d'irradiation infrarouge est donné par le rapport des ordonnées correspondantes de l'une des courbes I-II-III-IV et des ordonnées de la courbe V. On obtient ainsi les courbes définitives de la figure 3. Ici l'allure

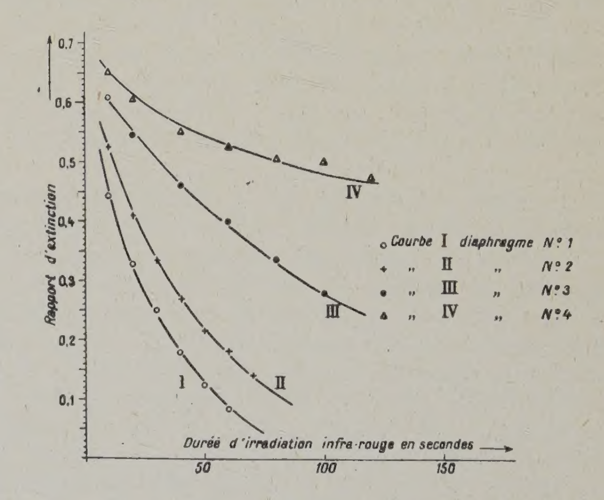


Fig. 3. — Extinction infrarouge de l'illumination fugace (sulfure à évolution rapide).

des courbes se rapproche mieux de la forme exponentielle (sauf pour la courbe IV) et l'extinction pour une même somme de lumière infrarouge semble moins dépendre de l'intensité du flux infrarouge. Quoiqu'il en soit la relation de Lewschin-Romanowsky-Timmerman ne peut être retenue pour représenter convenablement l'extinction du phénomène d'illumination fugace.

3. **Accélération par le champ de l'effet extincteur infrarouge sur la phosphorescence.** — J'avais déjà montré qualitativement l'effet accélérateur du champ sur l'action extinctrice infrarouge, l'extinction étant plus forte lorsqu'on fait agir le champ. En fait, nous avons vu que le champ électrique, en dehors de toute irradiation aux rayons de grande longueur d'onde, produisait par lui-même une légère extinction de la phosphorescence (note précédente). Pour séparer les deux effets, extinction propre du champ et accélération de l'effet extincteur infrarouge, il convient d'opérer comme il suit. La substance étant excitée suffisamment longtemps (40 sec) de manière à obtenir la brillance limite, on détermine la brillance B_0 de l'écran 15 sec après la fin de l'excitation. La substance étant à nouveau excitée de la même façon, on applique le champ dès la fin de l'excitation et 15 sec après comme précédemment on détermine la nouvelle brillance B_0, le rapport d'extinction $\rho_c = \frac{B_e}{B_0}$ caractérise l'action extinctrice propre du champ (il est bien entendu que dans l'évaluation de B_c il y a lieu de retrancher de la lecture de la brillance, le résidu de brillance dû à la phosphorescence à évolution rapide consécutive à l'illumination fugace). On recommence l'excitation, mais en irradiant simultanément durant un court laps de temps (5 sec) par un faisceau infrarouge intense suivant le protocole suivant : durant $40 - (t + 5)$ sec irradiation seule aux rayons X, durant 5 sec irradiation simultanée X et infrarouge, durant t sec irradiation seule aux rayons X, en déterminant à nouveau la brillance B_{IR} 15 sec après la fin de ces irradiations, on évalue le rapport d'extinction

$$\rho_{IR} = \frac{B_{IR}}{B_0},$$

dû à l'action infrarouge seule.

Enfin, suivant le même protocole d'irradiation, puis faisant agir le champ dès la fin de l'irradiation et le maintenant de manière permanente, on mesure toujours 15 sec après, la nouvelle brillance résiduelle B_1, d'où le rapport d'extinction

$$\rho = \frac{B_1}{B_0}.$$

Les valeurs de ρ_{IR} et de ρ sont fonctions de t, c'est-à-dire fonctions de l'époque à laquelle se place en cours d'excitation l'irradiation complémentaire infrarouge.

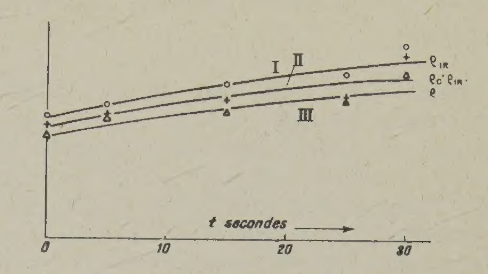


Fig. 4. — Évolution dans le temps des divers rapports d'extinction (sulfure à évolution lente).

Si le champ était sans effet sur l'action extinctrice infrarouge, on devrait avoir

$$\rho = \rho_c \cdot \rho_{IR},$$

or, en fait, on constate que l'on a toujours

$$\rho < \rho_c \cdot \rho_{IR},$$

c'est-à-dire que l'action simultanée du champ et des rayons infrarouges produit une extinction

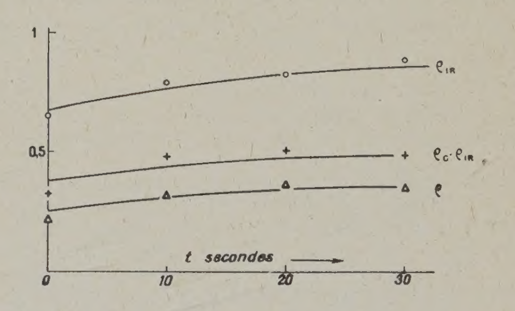


Fig. 5. — Évolution dans le temps des divers rapports d'extinction (sulfure à évolution rapide).

supérieure (rapport d'extinction plus faible) à celle qui devrait être constatée si ces actions étaient absolument indépendantes.

Les courbes des figures 4 et 5 fournissent ainsi les résultats obtenus pour les deux sulfures étudiés, les valeurs de ρ_c évidemment indépendantes de t sont :

$\rho_c = 0,90$ pour le sulfure SZn 107 ;

$\rho_c = 0,50$ pour le sulfure mixte SZn-SCd.

L'action extinctrice infrarouge persiste un temps assez long, il est donc nécessaire de se prémunir, entre deux expériences, contre toute hystérésis, à cet effet, avant de renouveler une mesure, il est nécessaire de faire agir une assez longue irradiation

aux rayons X coupée de temps en temps par des applications du champ jusqu'à ce que le phénomène d'illumination fugace (très sensible aux rayons infrarouge) soit observé à nouveau avec toute son intensité.

4. **Action infrarouge sur le phénomène de luminescence propre.** — En dehors de toute irradiation aux rayons de courte longueur d'onde, les champs variables suffisamment intenses excitent la luminescence des substances fluorescentes ou phosphorescentes. En opérant à champ constant, la luminescence accompagne seulement la charge ou la décharge de la cellule luminescente, en champ sinusoïdal la substance reste au contraire illuminée en permanence.

Dans le cas des sulfures phosphorescents, on pourrait s'attendre à une action extinctrice des radiations infrarouges; en fait, lors de l'excitation par champ sinusoïdal, on n'observe aucun affaiblissement même avec des flux infrarouges, particulièrement intenses.

L'action infrarouge se manifeste toutefois, bien que faiblement, dans l'action des champs constants. Après une irradiation infrarouge intense, la luminescence accompagnant la charge de la cellule peut même être annihilée, mais l'action infrarouge est ici très fugace, car dès la première décharge de la cellule, la luminescence excitée reprend son intensité normale. Pour le moment, je n'ai pu étudier, quantitativement, le phénomène, car le montage utilisé pour les autres mesures est insuffisamment sensible.

5. **Conclusion.** — Les radiations infrarouges modifient de manière sensible les phénomènes observés en électrophotoluminescence et principalement l'illumination fugace des sulfures luminescents préalablement excités; de plus, le champ électrique accélère l'extinction infrarouge de la luminescence visible. L'action sur l'effet de luminescence propre est, par contre, peu importante et très fugace.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1942.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Destriau, *J. de Physique*, 1943, **4**, p. 32.
[2] W. L. Lewschin, W. W. Antonow Romanowsky et L. A. Timmerman, *Physik. Z. Soviet Union*, 1934, **5**, p. 811.